

# THÈSE

Présentée à

## L'UNIVERSITÉ BORDEAUX 1

ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES ET ENVIRONNEMENTS

Par **Marion Tissier**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

### DOCTEUR

SPECIALITÉ : PHYSIQUE DE L'ENVIRONNEMENT

---

**Etude numérique de la transformation des vagues en zone littorale,  
de la zone de levée aux zones de surf et de jet de rive**

---

Soutenue le 15 décembre 2011

Après avis de :

<b>Stéphane Abadie</b>	Professeur, LASAGEC, Anglet	Rapporteur
<b>Eric Barthélemy</b>	Professeur, LEGI, Grenoble	Rapporteur

Devant la commission d'examen formée de :

<b>Stéphane Abadie</b>	Professeur, LASAGEC, Anglet	Rapporteur
<b>Eric Barthélemy</b>	Professeur, LEGI, Grenoble	Rapporteur
<b>Philippe Bonneton</b>	DR CNRS, EPOC UBI, Bordeaux	Directeur
<b>Pascal Lecroart</b>	Professeur, EPOC UBI, Bordeaux	Examineur
<b>Fabien Marche</b>	Maître de conférence, I3M, Montpellier	Co-Directeur
<b>Rodrigo Pedreros</b>	Docteur, BRGM, Orléans	Examineur
<b>Gerben Ruessink</b>	Professeur associé, Faculty of Geosciences Utrecht, Pays-Bas	Examineur



# Remerciements

Ce travail n'aurait jamais été tel qu'il est présenté dans cette thèse sans le soutien et l'aide de plusieurs personnes. Je voudrais avant tout remercier mes directeurs de thèse, Philippe Bonneton et Fabien Marche. Un grand merci tout d'abord à Philippe, qui a suivi ma thèse au jour le jour et a toujours su se rendre disponible quand j'en avais besoin. Merci de m'avoir tant appris et si bien guidée pendant ces trois années. Merci également à Fabien, qui m'a beaucoup appris dans un domaine totalement nouveau pour moi, et très souvent aidée et conseillée. Je remercie également nos collaborateurs mathématiciens, Florent Chazel et David Lannes, sans qui ces travaux de thèse n'auraient certainement pas pu aboutir. Merci d'avoir été si patients face à mes nombreuses questions de non-initiée. Travailler dans une équipe multidisciplinaire n'a pas toujours été évident, mais a été extrêmement enrichissant. Merci donc de m'avoir acceptée parmi vous !

Je tiens à remercier l'ensemble des membres du jury. Merci à Stéphane Abadie et Eric Barthélemy d'avoir accepté de rapporter ma thèse. Vos remarques ont été très enrichissantes. Merci à Pascal Lecroart d'avoir accepté de présider mon jury de thèse. Merci à Rodrigo Cienfuegos, qui a suivi l'avancement de mes travaux de recherche depuis le début. Enfin, je tiens à remercier Gerben Ruessink d'avoir accepté de participer à mon jury de thèse, et de m'avoir par la suite accueillie dans son groupe de recherche à Utrecht !

Je remercie l'ensemble des membres de l'équipe METHYS : Vincent et Bruno, pour m'avoir convaincue de me lancer dans une thèse (en particulier Vincent !), puis pour m'avoir aidée et conseillée de très nombreuses fois tout au long de celle-ci. Natalie pour ses nombreux coups de pouce, en particulier à l'approche de la soutenance. Et enfin, Nadia, Jean-Paul, Aldo, Sylvain, Stéphane et Bertrand pour les échanges que nous avons pu avoir tout au long de cette thèse. Je souhaite, de plus, remercier l'ensemble des participants de la campagne de mesure du Truc Vert 2008. La superbe ambiance qui régnait sur le terrain pendant ces 6 semaines au grand air est pour beaucoup dans ma décision de m'engager dans une thèse ! Merci en particulier à Alphonse et à Patrice.

Enfin, je voudrais remercier la foule de thésards du labo. Tout d'abord merci à Aurélie, qui en plus de m'avoir sauvé la vie plus d'une fois, m'a aussi tellement fait rigoler plus d'une fois. Merci à mes surfeurs au grand coeur, Florent et Benjamin, avec qui j'ai partagé de très bons moments, à la plage ou au labo. Merci à Laurie pour son coaching intensif et nos petits moments de folie, et merci à Sam, pour sa patience face à notre folie

---

et ses blagounettes de soutien. Merci également au ptit Loïc, pour nos discussions autour d'une bière, nos pots au feu et notre amour commun du voyage ! Merci à Laurent pour nos grands moments de RU, à Marie-Lise pour ses sourires et sa motivation à toute épreuve, à Céline pour ses petites attentions, à Aurélie pour sa blague le jour J. Merci enfin à Ana, Geza, Christian, JB , Laureline, Thibaut, Camille, Elsa, Sandra et de manière plus générale, merci à toute la jeunesse du labo, mais également aux "anciens", Caro, Emilie, Julien, Aurélia, Aurélie, Romain, Pierre et les autres. Vos sourires, blagounettes, ou autres instants partagés ont rendu mes journées de travail bien plus agréables. Merci à Nicolas et Rafael, nos jeunes vieux de Methys, qui ont été de bels exemples pour moi ! Merci pour votre accueil lors de mon arrivée dans l'équipe, et pour nos grandes discussions autour d'une bière. Merci enfin aux copains de passage, en commençant par François et Benjamín, qui ont quitté Bordeaux beaucoup trop rapidement à mon goût ! Merci à mes nouveaux compatriotes, Timothy et Barend. Puis merci à Lisa, avec qui j'ai passé de nombreux grands moments en très peu de temps.

Je remercie nos experts informatiques, Jean-Michel et Hubert, pour leurs très nombreux dépannages. Un merci plus spécifique à Jean-Michel pour ses capucines, tournesols et autres ! Merci à Cathy, pour ses coups de main et sa gentillesse, et à Domi, pour sa bonne humeur communicative et ses nombreux encouragements.

Enfin merci à tous les copains, de Bordeaux, de Toulouse, de Paris ou d'ailleurs : Ophélie, Anne, Lucie, Maïa, Lyse, Sandrine, Adé, MC, Julien, Jérem, Caro, Camille, Marie, Val, Ludo, Luca, Michael, Thomas et tous les autres... Je serai plus disponible maintenant ! Je tiens à remercier ma famille, et en particulier mes parents pour leur soutien pendant ces longues années d'étude. Un très très grand merci à mes frérots pour leur soutien à toute épreuve, en particulier ces derniers mois, et puis bien sûr, un énorme merci à Sierd, sans qui cette thèse ne se serait jamais aussi bien passée !

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>11</b>
1.1	Contexte des travaux de thèse . . . . .	11
1.2	Objectifs et organisation de la thèse . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Modélisation instationnaire des vagues en zone littorale</b>	<b>17</b>
2.1	Introduction . . . . .	17
2.2	Modèles de type Boussinesq . . . . .	18
2.2.1	Présentation . . . . .	18
2.2.2	Equations de S-GN 1DH et fond plat . . . . .	20
2.2.3	Paramétrisation du déferlement . . . . .	25
2.3	Modèles basés sur les équations de Saint-Venant . . . . .	27
2.3.1	Propriétés des équations de Saint-Venant . . . . .	28
2.3.2	Limites d'applicabilité du modèle . . . . .	35
2.4	Vers des modèles hybrides ? . . . . .	36
2.5	Conclusion . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Présentation du modèle</b>	<b>39</b>
3.1	Introduction . . . . .	39
3.2	Une nouvelle formulation des équations de S-GN . . . . .	39
3.2.1	Equations de S-GN sous leur forme adimensionnée . . . . .	39
3.2.2	Première reformulation des équations . . . . .	40
3.2.3	Amélioration des propriétés dispersives . . . . .	41
3.2.4	Reformulation en terme des variables $(h, h\mathbf{V})$ . . . . .	42
3.3	Méthodes numériques . . . . .	43
3.3.1	Schéma de splitting . . . . .	43
3.3.2	Discrétisation spatiale de la partie hyperbolique $S_1(\cdot)$ . . . . .	44
3.3.3	Discrétisation spatiale de la partie dispersive $S_2(\cdot)$ . . . . .	50
3.3.4	Discrétisation temporelle . . . . .	50
3.3.5	Conditions limites . . . . .	50
3.4	Validations . . . . .	52
3.4.1	Propagation d'ondes cnoïdales sur fond plat . . . . .	52

3.4.2	Transformations d'ondes solitaires en zone de levée . . . . .	52
3.5	Conclusion . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Prise en compte du déferlement</b>	<b>57</b>
4.1	Introduction . . . . .	57
4.2	Article soumis à <i>Coastal Engineering</i> . . . . .	58
4.2.1	Introduction . . . . .	59
4.2.2	Description of the model . . . . .	62
4.2.3	Wave breaking . . . . .	64
4.2.4	Validations . . . . .	69
4.2.5	Conclusion . . . . .	79
4.3	Application à l'étude des ondes infragravitaires en zone de surf . . . . .	81
4.3.1	Généralités sur les ondes infragravitaires . . . . .	81
4.3.2	Validation du modèle pour des houles bichromatiques . . . . .	82
4.4	Conclusion . . . . .	91
<b>5</b>	<b>Dynamique des ondes longues de type tsunami en zone littorale</b>	<b>95</b>
5.1	Introduction . . . . .	95
5.2	Généralités sur les ressauts hydrauliques . . . . .	99
5.2.1	Physique de base du ressaut . . . . .	99
5.2.2	Approche de <i>Lemoine</i> (1948) . . . . .	102
5.3	De ressaut ondulé à ressaut déferlant . . . . .	104
5.3.1	Développement et propagation d'un ressaut ondulé . . . . .	104
5.3.2	Prédiction des différents types de ressauts par le modèle . . . . .	106
5.3.3	Caractérisation des ressauts . . . . .	109
5.3.4	Transition spatiale . . . . .	111
5.4	Transformations à l'approche du rivage . . . . .	114
5.4.1	Désintégration du soliton . . . . .	114
5.4.2	Transformation sur la plage . . . . .	118
5.5	Conclusion . . . . .	119
<b>6</b>	<b>Célérité des vagues en zone de surf</b>	<b>125</b>
6.1	Introduction . . . . .	125
6.2	Contexte scientifique . . . . .	125
6.2.1	Phénoménologie . . . . .	125
6.2.2	Modélisation de la célérité . . . . .	131
6.3	Étude in-situ de la célérité (Article) . . . . .	133
6.3.1	Introduction . . . . .	134
6.3.2	Field data and methods . . . . .	136
6.3.3	Analysis of experimental results . . . . .	141

6.3.4	Evaluation of the predictive abilities of several non-linear celerity models . . . . .	144
6.3.5	Influence of very low frequency oscillations of the wave-induced currents on wave celerity . . . . .	147
6.3.6	Conclusion . . . . .	148
6.4	Conclusion et perspectives . . . . .	150
<b>7</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>153</b>
<b>A</b>	<b>Résolution de problèmes de Riemann linéaires</b>	<b>169</b>
A.1	Définition . . . . .	169
A.2	Résolution dans le cas d'un système hyperbolique linéaire . . . . .	169
<b>B</b>	<b>Article publié dans <i>Journal of Coastal Research</i></b>	<b>173</b>
<b>C</b>	<b>Proceeding ICCE 2010, Shanghai, China</b>	<b>179</b>





# Glossaire

$a$	: Amplitude de la vague
$a_w$	: Amplitude des ondulations secondaires (ressaut hydraulique)
$a_f$	: Amplitude caractéristique des variations du fond
$b$	: Cote du fond
$B$	: Paramètre caractéristique de l'asymétrie des vagues, $B = \zeta_c/H$
$c_b$	: Célérité du front déferlé
$c_g$	: Vitesse de groupe d'un train d'ondes
$c_r$	: Célérité relative au plan d'eau
$c_a$	: Célérité dans un référentiel absolu
$c_\varphi$	: Vitesse de phase d'une onde
$d$	: Profondeur d'eau au repos
$D(x, t)$	: Dissipation d'énergie locale : $D(x, t) = -(\partial_t \mathcal{E} + \partial_x \mathcal{F})$
$D_b$	: Dissipation théorique au niveau du front déferlé
$\mathcal{D}$	: Terme dispersif/non-hydrostatique des équations de S-GN.
$\mathcal{E}$	: Densité d'énergie $\mathcal{E} = \frac{\rho}{2}(hu^2 + g\zeta^2)$
$f_1, f_2$	: Fréquences primaires d'une onde bi-chromatique
$\mathcal{F}$	: Flux d'énergie $\mathcal{F} = \rho hu(\frac{u^2}{2} + g\zeta)$
$Fr_1$	: Nombre de Froude du ressaut ( $Fr_1 = (c_b - u_1)/(gh_1)^{1/2}$ )
$Fr_a$	: Valeur du nombre de Froude à la transition entre ressaut ondulé et ondulé partiellement déferlant
$Fr_b$	: Valeur du nombre de Froude à la transition entre ressaut ondulé partiellement déferlant et ressaut purement déferlant
$F^{front}$	: Flux d'énergie associé aux ondulations secondaires dans le référentiel lié au front
$g$	: Accélération gravitationnelle terrestre
$H$	: Hauteur de la vague ( $H = 2a$ )
$h$	: Hauteur d'eau
$h_0$	: Profondeur d'eau caractéristique
$h_1 (h_2)$	: Profondeur d'eau devant (derrière) le front de vague ( $h_2 > h_1$ )
$\bar{h}$	: Hauteur moyenne du plan d'eau
$H_s$	: Hauteur significative des vagues
$H_{1/3}$	: Hauteur moyenne du tiers des plus hautes vagues
$H_{rms}$	: Écart-type de la hauteur des vagues
$I_r$	: Intensité du ressaut, $I_r = (h_2 - h_1)/h_1$
$k$	: Nombre d'onde de la vague, $k = 2\pi/\lambda$

$\lambda$	: Longueur d'onde caractéristique
$L_w$	: Longueur d'onde des ondulations secondaires (ressaut hydraulique)
$N$	: Nombre de cellules
$Q_b$	: Flux de volume à travers le front (référentiel lié au front)
$u_1$ ( $u_2$ )	: Vitesse moyennée selon la verticale devant (derrière) le ressaut
$U_m$	: Courant cross-shore moyenné en temps, mesuré par l'ADV
$u$	: Composante selon $x$ du champ de vitesse
$v$	: Composante selon $y$ du champ de vitesse
$w$	: Composante verticale du champ de vitesse
$U$	: Composante selon $x$ de la vitesse moyennée sur la verticale
$V$	: Composante selon $y$ de la vitesse moyennée sur la verticale
$\mathbf{V}$	: Composante horizontale de la vitesse moyennée sur la verticale ( $U, V$ )
$x, y$	: Coordonnées spatiales horizontales
$x_b$	: Position du front déferlé
$z$	: Coordonnée spatiale verticale
$\beta$	: Pente normalisée
$\beta_f$	: Paramètre adimensionné représentant les variations bathymétriques
$\delta_x$	: Pas d'espace
$\delta_t$	: Pas de temps
$\epsilon$	: Paramètre non-linéaire $\epsilon = a/h_0$
$\gamma$	: $2 \epsilon$
$\mu$	: Paramètre caractérisant les effets dispersifs ( $\mu = (h_0/\lambda)^2$ )
$\rho$	: Masse volumique
$\zeta$	: Élévation de la surface libre par rapport au niveau de référence
$\zeta_c$	: Élévation de la crête de la vague par rapport au niveau de référence

# Chapitre 1

## Introduction générale

### 1.1 Contexte des travaux de thèse

La zone littorale est un milieu à la fois très dynamique et très vulnérable, sur lequel s'exerce une forte pression socio-économique. En effet, près de 60% de la population mondiale vit à moins de 100 km des côtes, faisant de son aménagement et de sa protection durable de forts enjeux d'un point de vue sociétal. Une étude réalisée par l'Union Européenne en 2004 a montré que 20% de l'ensemble des côtes de l'UE (soit environ 20000 km) étaient fortement affectés par le phénomène d'érosion. Cette érosion est, dans la plupart des cas, associée à un recul effectif du trait de côte (15100 km), et cela en dépit des travaux de protection engagés pour une part non négligeable du littoral (2900 km). Les impacts de ce phénomène sont lourds, tant au niveau économique que humain, en particulier lorsque l'érosion aboutit à l'affaiblissement des défenses côtières naturelles (cordon de dune), ou artificielles (par la déstabilisation d'ouvrages), rendant les littoraux encore plus vulnérables à la submersion. Dans ce contexte, l'étude de la dynamique hydro-sédimentaire, via la modélisation, est essentielle pour mieux comprendre les mécanismes d'érosion et anticiper les impacts potentiels sur le littoral.

L'approche classique pour décrire la dynamique hydro-sédimentaire en zone littorale consiste à modéliser avec deux modèles distincts, mais couplés, les mouvements rapides liés aux vagues, traités de manière statistique, et les mouvements lents, traités de manière déterministe. Ce type de modélisation est très utile pour simuler l'hydrodynamique sur des temps longs, et par exemple prévoir l'évolution globale des littoraux sableux sur plusieurs mois. Cependant, la description de l'évolution complexe des barres de sables, indispensable pour le développement de méthodes efficaces de lutte contre l'érosion, nécessite une connaissance précise de la transformation spatio-temporelle des vagues. Par exemple, il a été montré que les effets d'accélération liés à l'asymétrie horizontale des vagues étaient à l'origine du transport de sédiment vers la côte en période d'accalmie, mécanisme naturel de rechargement des plages. D'une manière générale, il est maintenant admis que l'amélioration de la modélisation du transport sédimentaire passera à terme par une prise en compte des caractéristiques instantanées des vagues

plutôt que de leurs caractéristiques moyennées.

Une bonne description des transformations instantannées des vagues est également nécessaire dans une optique de protection contre les risques de submersion marine liés aux vagues extrêmes (vagues de tempête ou de tsunami). Au cours des dernières années, les inondations marines ont provoqué d'importants dégâts sur les côtes françaises. On peut citer l'exemple récent de la tempête Xynthia en 2010 qui a occasionné d'importantes inondations sur les côtes françaises, principalement en Charente-Maritime, en Vendée et dans les Côtes-d'Armor. La situation est jugée préoccupante car le nombre de ces catastrophes est susceptible d'augmenter sur le long terme. C'est dans ce contexte que le projet MISEEVA<sup>1</sup> (2008-2011), réalisé dans le cadre de l'ANR Vulnérabilité Milieu Climat 2007 et coordonné par le BRGM a été mené. Son objectif est d'évaluer la vulnérabilité du système côtier à la submersion marine, dans un contexte de changement global, aux échéances de 2030 et 2100.

Mes travaux de thèse sont financés par ce projet et s'inscrivent plus particulièrement dans son volet modélisation, dont l'objectif est le développement d'outils permettant une quantification de l'étendue spatiale et temporelle de l'inondation. Si des formules semi-empiriques peuvent être utilisées pour estimer l'altitude du run-up, des modèles de vagues instationnaires sont nécessaires pour une modélisation précise des mouvements de la ligne d'eau et de la submersion. Une bonne prédiction des mouvements en zone de jet de rive ne pouvant se faire sans une connaissance précise des transformations préalables de vagues, les modèles utilisés doivent être capables de modéliser la transformation des vagues de la zone de levée à la zone de jet de rive, déferlement compris, et cela sur des bathymétries complexes. L'approche la plus complète pour modéliser la transformation des vagues en zone de surf est basée sur les équations de Navier-Stokes diphasiques (NSD). Cependant les coûts de calcul deviennent prohibitifs lorsque l'on considère la modélisation hydrodynamique en milieu naturel aux échelles qui nous intéressent. Afin de simplifier le problème, l'approche classique en milieu peu profond consiste à moyenniser les équations du mouvement selon la verticale. Dans ces travaux de thèse, nous nous intéresserons exclusivement aux modèles instationnaires de vagues ainsi obtenus, dits modèles 2DH (deux dimensions horizontales).

## 1.2 Objectifs et organisation de la thèse

Différentes approches peuvent être adoptées pour décrire les transformations instationnaires 2DH des vagues en zone littorale. Les modèles instationnaires de type Saint-Venant permettent de décrire très efficacement la dynamique des vagues dans les zones de surf et de jet de rive. Leur gestion simple de la ligne d'eau en font des outils perfor-

---

1. Marine Inundation hazard exposure modelling and Social, Economic and Environmental Vulnerability Assessment in regard to global changes

mants pour gérer les cas de franchissement, où la séparation de la masse d'eau initiale en plusieurs corps distincts amène une multiplication des lignes d'eau. Ils sont donc naturellement adaptés à l'étude de la submersion, mais ne sont valables qu'après déferlement. Le code Saint-Venant SURF-WB (*Marche et al., 2007*) a par exemple été appliqué avec succès à des cas de submersion dans le cadre de l'ANR MISEEVA (Figure 1.1), mais a dû être couplé à un modèle de houle à phase moyennée (code SWAN) de manière à propager les vagues incidentes jusqu'à la zone de surf. Les modèles instationnaires de type Boussinesq permettent quant à eux de décrire la transformation des vagues avant déferlement, mais ne peuvent s'appliquer de manière naturelle à la description des vagues en zone de surf et de jet de rive. L'introduction de paramétrisations permet de lever ces limitations, mais l'application aux cas de submersion avec franchissement reste difficile.

L'objectif de ces travaux de thèse est d'unifier ces deux approches, afin d'obtenir un outil performant pour l'étude de la submersion valable de la zone de levée à la zone de jet de rive. D'un point de vue pratique, nous cherchons à étendre le domaine de validité du modèle SURF-WB vers le large en prenant en compte les effets dispersifs, tout en conservant ses qualités initiales concernant la gestion de la ligne d'eau et du déferlement. Cette extension est le résultat de collaborations menées dans le cadre de l'ANR Math-Ocean. Nous tenons en particulier à souligner le rôle moteur de Florent Chazel (IMT, Univ. de Toulouse), de David Lannes (DMA, ENS Paris) et de Fabien Marche (I3M, Univ. de Montpellier 2) dans le développement mathématique et numérique du modèle.

L'ensemble des travaux menés pendant ces 3 années sont regroupés sous la forme de 7 chapitres :

- Dans le **chapitre 2**, nous présenterons un état de l'art de la modélisation instationnaire 2DH des vagues en milieu littoral. Les deux approches classiques de modélisation, Saint-Venant et Boussinesq, seront décrites. Les limitations respectives de ces approches seront soulignées, et leur domaine de validité discuté. Cet état de l'art nous permettra d'introduire notre stratégie de modélisation, basée sur un couplage de ces deux approches.
- Notre modèle numérique, basé sur des équations de type Boussinesq fortement non-linéaires, sera présenté dans le **chapitre 3**. Dans une première partie, nous décrirons la reformulation du système d'équations ayant permis de faciliter sa résolution numérique. Dans une seconde partie, une description des méthodes numériques utilisées sera proposée. Le modèle sera ensuite validé pour des cas de vagues non-déferlées.
- Le **chapitre 4** présentera notre modèle de déferlement. La nouvelle approche développée dans le cadre de cette thèse est présentée sous forme d'un article,

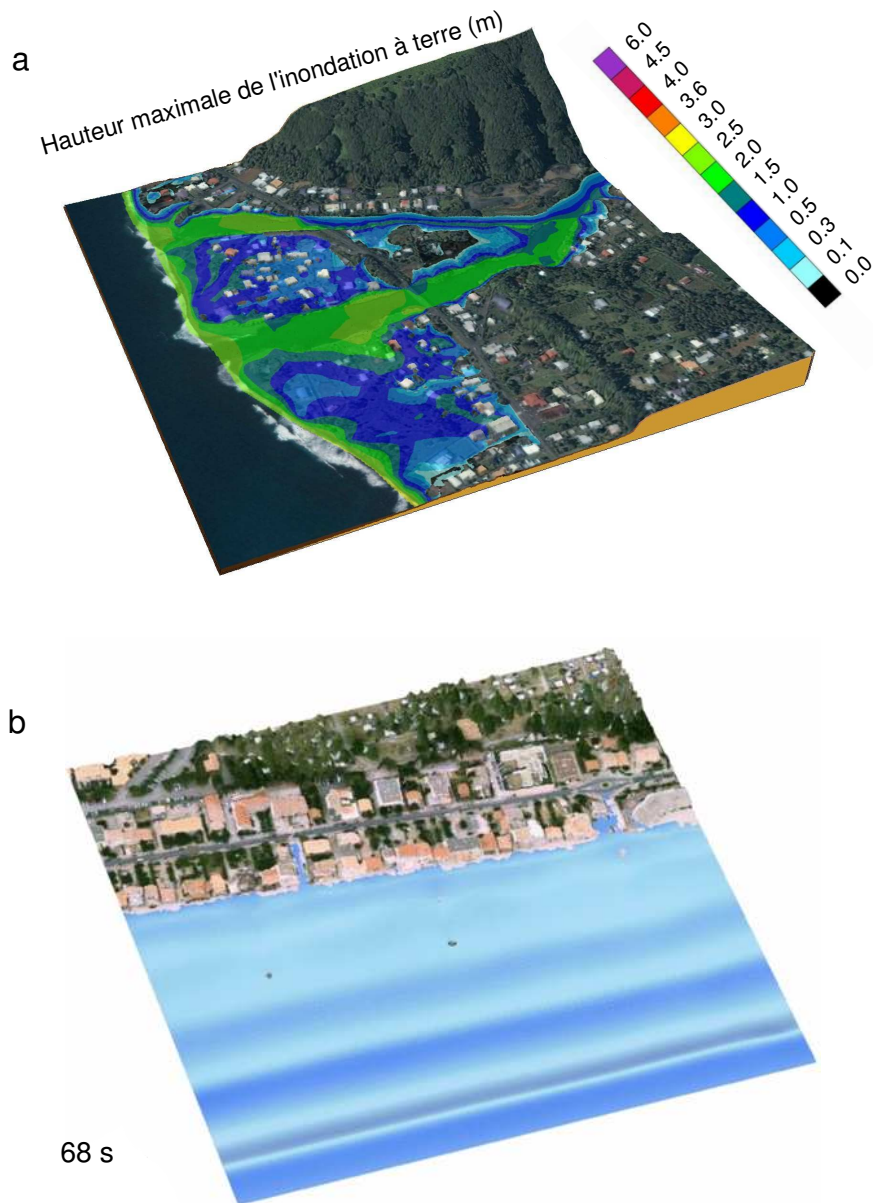


FIGURE 1.1 – Exemples d'utilisation du code SURF-WB (*Marche et al.*, 2007) dans le cadre de l'ANR MISEEVA. (a) Calcul de la submersion générée par un tsunami à Tahiti (secteur de Papeenoo); (b) Submersion de Palavas-les-Flots lors de la tempête de novembre 1982; Figures issues de *Pedreras et al.* (2010).

soumis à *Coastal Engineering*. Cet article inclut de nombreuses validations à l'aide d'expériences de laboratoire pour différents types de vagues incidentes et de bathymétries. Le nouveau modèle obtenu, appelé SURF-GN, sera appliqué à l'étude de la transformation des ondes infragravitaires en zone de surf. La simulation de la transformation de deux types de trains d'ondes bichromatiques permettra d'évaluer les performances du modèle en terme de description de la génération des ondes infragravitaires ainsi que de leurs transformations en zone de surf et de jet de rive. Ces simulations constituent un cas test important pour évaluer les propriétés non-linéaires du modèle.

- Nous verrons dans le **chapitre 5** que notre modèle hybride est particulièrement adapté à l'étude de la dynamique d'ondes longues de type tsunami en zone littorale. Les capacités du modèle à reproduire la dynamique des fronts d'onde pour une large gamme de nombres de Froude seront tout d'abord évaluées en considérant le cas académique du ressaut hydraulique propagatif. Nous analyserons dans un second temps les effets de la transformation de l'onde longue de type tsunami en train d'ondulations sur le run-up. Nous concluerons sur l'intérêt de bien prendre en compte les effets dispersifs lors de la propagation des ondes longues en zone littorale.
- Dans le **chapitre 6**, nous proposons une étude expérimentale de la dynamique des fronts d'ondes déferlées. Plus précisément, ce chapitre présente une étude de la célérité des vagues en zone de surf basée essentiellement sur l'analyse de données in-situ. Nous étudierons en particulier l'influence des non-linéarités sur la célérité des fronts déferlés, et comparerons les performances de différents estimateurs de célérité non-linéaires. Les principaux résultats obtenus dans ce chapitre font l'objet d'un article publié dans *European Journal of Mechanics, B/Fluid* en 2011.
- Le **chapitre 7** synthétise les résultats majeurs obtenus à l'issue de ces travaux de thèse. Plusieurs perspectives de recherche seront proposées.





# Chapitre 2

## Modélisation instationnaire des vagues en zone littorale

Dans ce chapitre, nous introduirons tout d'abord les différentes approches possibles pour la modélisation instationnaire 2DH des vagues en zone littorale, et discuterons leurs principales limitations. Cet état de l'art nous permettra alors d'introduire notre stratégie de modélisation et ses spécificités.

### 2.1 Introduction

La propagation des vagues de surface dans un fluide homogène non-visqueux est décrite par les équations de Euler, combinées à des conditions limites non-linéaires pour la surface libre et sur le fond. Dans le cas d'un fluide incompressible et irrotationnel, ces équations s'écrivent dans le plan vertical  $(x, z)$  :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad z \in [-h_0 + b, \zeta] \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} = w \quad z = \zeta \quad (2.5)$$

$$w = u \frac{\partial b}{\partial x} \quad z = -h_0 + b \quad (2.6)$$

avec  $(u, v, w)$  le champ de vitesse,  $h = h_0 + \zeta - b$  la profondeur d'eau (voir définitions des variables sur la figure 2.1), et  $\rho$  la densité du fluide, supposée constante.

Ce problème est extrêmement difficile à résoudre, en particulier parce que la surface libre fait partie de la solution. Dans la zone littorale, l'échelle horizontale caractéristique de l'écoulement des vagues est grande devant la profondeur d'eau. Afin de réduire la

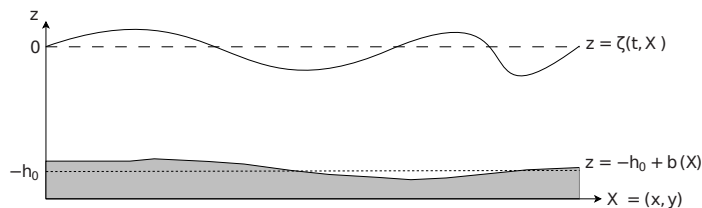


FIGURE 2.1 – Définition des variables.

complexité du problème, il est alors naturel de travailler non plus sur les équations tri-dimensionnelles du mouvement, mais sur une version bi-dimensionnelle obtenue après intégration sur la verticale. Cela signifie que l'on suppose la surface libre monovaluée, hypothèse valable avant déferlement ainsi qu'en zone de surf interne et de swash, mais non valide dans la zone de transition dans le cas d'un déferlement plongeant.

L'analyse dimensionnelle du problème met alors en évidence deux nombres sans dimension fondamentaux. Le premier est défini par  $\mu = (h_0/\lambda)^2$ , avec  $h_0$  et  $\lambda$  respectivement la profondeur et la longueur d'onde caractéristiques, et témoigne du caractère dispersif de l'écoulement. Le second paramètre adimensionné caractérise les non-linéarités de l'écoulement, et est défini par  $\epsilon = a/h_0$ , avec  $a$  l'amplitude caractéristique des vagues. Différents modèles moyennés sur la verticale peuvent être obtenus suivant l'importance relative des nombres sans dimension  $\epsilon$  et  $\mu$ . Nous introduirons tout d'abord les modèles de type Boussinesq (§2.2), puis présenterons le modèle hyperbolique de Saint-Venant (§2.3), qui peut être vu comme un cas limite des équations de type Boussinesq fortement non-linéaires. Les principales propriétés de ces modèles et leurs limitations respectives seront présentées. Nous introduirons finalement dans la partie 2.4 la stratégie de modélisation choisie pour notre travail, basée sur une approche hybride.

## 2.2 Modèles de type Boussinesq

### 2.2.1 Présentation

Les modèles de Boussinesq "classiques" sont obtenus en faisant les hypothèses de faible dispersion, de faible non-linéarité et d'équilibre entre effets dispersifs et non-linéaires, c'est-à-dire :  $\epsilon = O(\mu) \ll 1$  (voir par exemple *Peregrine, 1967*). Ces équations s'écrivent sous la forme adimensionnalisée suivante

$$\begin{cases} \partial_t \zeta + \nabla \cdot (h \mathbf{V}) = 0, \\ \partial_t \mathbf{V} + \epsilon (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \nabla \zeta = \mu \mathcal{D} + O(\mu^2), \end{cases} \quad (2.7)$$

où  $\mathbf{V}$  est la composante horizontale de la vitesse moyennée sur la verticale et  $h$  la profondeur d'eau.  $\mathcal{D}$  représente les effets dispersifs et non-hydrostatiques et s'écrit :

$$\mathcal{D} = \frac{h}{2} \nabla [\nabla \cdot (h \partial_t \mathbf{V})] - \frac{h^2}{6} \nabla^2 \partial_t \mathbf{V}.$$

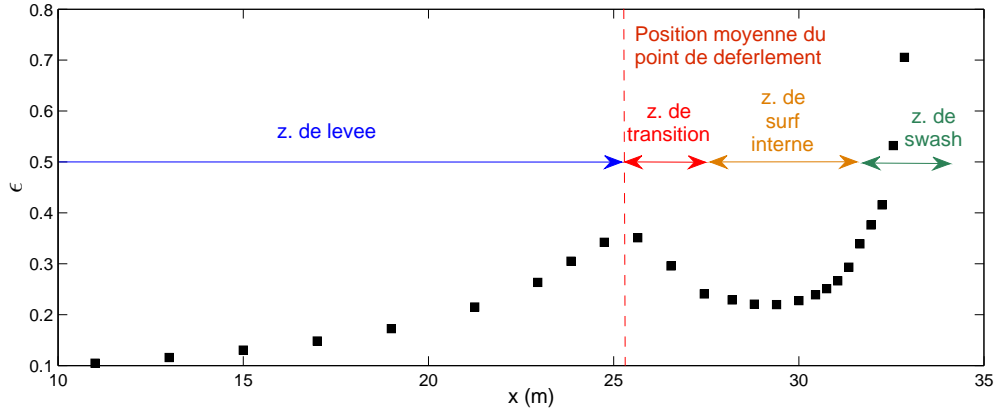


FIGURE 2.2 – Variation du paramètre non-linéaire  $\epsilon = a/h_0$  moyenné sur plusieurs groupes de vagues en fonction de la position pour des expériences de laboratoire sur houles bi-chromatiques et plage plane (calculé à partir des données de *van Noorloos*, 2003).

Cependant, l'hypothèse de faible non-linéarité restreint de manière importante le champ d'application de ces équations, puisque  $\epsilon$  peut être de l'ordre de 1 en zone littorale. La figure 2.2 présente les variations caractéristiques de  $\epsilon$  de la zone de levée à la zone de jet de rive pour une plage plane. On voit que les non-linéarités, faibles pour les mesures les plus au large, augmentent progressivement pendant la phase de levée de la vague. Elles atteignent un maximum local juste avant le déferlement, avec des valeurs de l'ordre de 0.4. Le paramètre non-linéaire décroît ensuite de manière assez rapide dans la zone de transition. La zone de surf interne est ensuite caractérisée par un  $\epsilon$  quasiment constant proche de 0.2. Enfin, à l'approche de la zone de jet de rive les non-linéarités augmentent.  $\epsilon$  peut finalement atteindre des valeurs de l'ordre de 1 pour les plus faibles profondeurs d'eau. L'hypothèse  $\epsilon \ll 1$  des modèles classiques de type Boussinesq n'est donc généralement pas adaptée à l'étude de la zone littorale.

Une avancée importante concernant le traitement des non-linéarités a été réalisée par *Serre* en 1953, qui a obtenu les premières équations de type Boussinesq fortement non-linéaires faiblement dispersives en une dimension et fond plat :  $\mu \ll 1$  et  $\epsilon = O(1)$  (voir aussi *Barthélemy*, 2004). Elles ont été ensuite étendues à deux dimensions et fond variable par *Green and Naghdi* (1976). Ces équations sont considérées comme les plus pertinentes pour la description des vagues fortement non-linéaires faiblement dispersives (*Cienfuegos et al.*, 2006, 2007; *Lannes and Bonneton*, 2009). Elles seront appelées *équations de Serre Green-Naghdi* (S-GN) par la suite. Ces équations se mettent également sous la forme (2.7), mais l'expression de  $\mathcal{D}$  est beaucoup plus complexe. Pour un fond plat et dans le cas de vagues se propageant en 1DH, on a (cf. démonstration §2.2.2) :

$$\mathcal{D} = \frac{1}{3h} \partial_x [h^3 (\mathbf{V}_{xt} + \epsilon \mathbf{V} \mathbf{V}_{xx} - \epsilon (\mathbf{V}_x)^2)].$$

Dans la communauté océanographe littorale, les travaux de S-GN ont été pendant

longtemps assez peu connus. Cette méconnaissance a conduit au développement à la fin des années 80, début des années 90 de systèmes d'équations dénommés "Fully nonlinear Boussinesq equations" qui sont en réalité équivalents aux équations de S-GN (cf. *Lannes and Bonneton, 2009*). Les équations de *Wei et al. (1995)*, utilisées dans le modèle FUN-WAVE, sont par exemple équivalentes aux équations de S-GN, mais ont été exprimées en terme de vitesse à une profondeur donnée plutôt qu'en fonction de la vitesse moyennée sur la profondeur. Dans leur étude, *Wei et al.* ont comparé les résultats donnés par des modèles de type Boussinesq fortement et faiblement non-linéaires à une simulation de référence réalisée à l'aide d'un modèle résolvant directement le problème potentiel sans hypothèse sur les non-linéarités. Ils ont ainsi montré qu'il était primordial de prendre en compte les non-linéarités à un ordre plus élevé pour bien reproduire la dynamique des vagues avant le déferlement. La figure 2.3, issue de *Wei et al. (1995)*, compare les résultats des modèles pour des ondes solitaires se propageant sur des plages à pente constante. Ces simulations montrent que le modèle de Boussinesq fortement non-linéaire permet une bien meilleure estimation de la transformation de l'onde solitaire à l'approche du déferlement que son homologue faiblement non-linéaire. Il est intéressant de noter que le modèle faiblement non-linéaire conduit souvent à une surestimation de la hauteur des vagues en fin de levée. Les équations de type Boussinesq fortement non-linéaires permettent également une meilleure estimation des profils de vitesse verticaux et de la célérité des fronts (*Wei et al., 1995; Carter and Cienfuegos, 2011*).

La dérivation des équations de S-GN à partir des équations d'Euler moyennées sur la verticale sera présentée dans la partie 2.2.2. Par souci de simplicité, nous nous limiterons à la présentation du cas 1DH sur fond plat. Nous rappellerons également les deux familles de solutions exactes des équations de S-GN. Dans une dernière partie (§2.2.3), nous aborderons les différentes stratégies développées pour permettre la description des vagues déferlées.

### 2.2.2 Equations de S-GN 1DH et fond plat

**Dérivation des équations** Pour simplifier le problème nous considérons des vagues 2D dans le plan vertical  $(x, z)$  se propageant sur fond plat ( $z = -h_0$  ou en variable adimensionnée  $z = -1$ ). Cette section s'inspire de l'article de *Barthélemy (2004)*. Pour le problème 3D sur fond variable on pourra se reporter à l'article de *Lannes and Bonneton (2009)*.

Les équations à surface libre (2.1) à (2.6) s'écrivent sous la forme adimensionnée

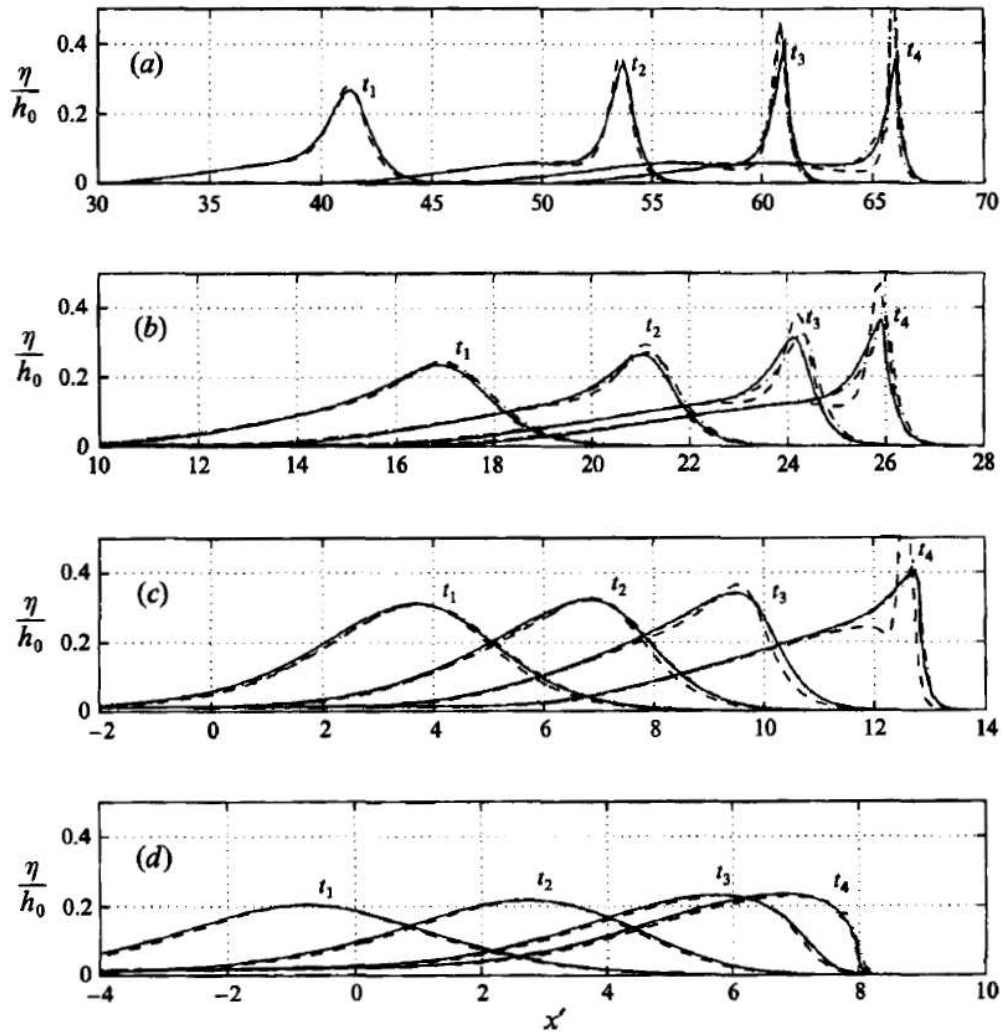


FIGURE 2.3 – Elévations de la surface libre à différents instants pour des ondes solitaires se propageant sur des plages à pente constante (figure issue de *Wei et al.*, 1995). (—) : Simulation de référence (Fully Nonlinear Potential Flow model) ; (---) : Boussinesq faiblement non-linéaire ; (- · -) : Boussinesq fortement non-linéaire. (a) : pente 1:100 ; (b) : pente 1:35 ; (c) : pente 1:15 (d) : pente 1:8.

suivante :

$$\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad z \in [-1, \epsilon\zeta] \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (2.9)$$

$$\epsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \epsilon^2 u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\epsilon^2}{\mu} w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x} \quad (2.10)$$

$$\epsilon \frac{\partial w}{\partial t} + \epsilon^2 u \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\epsilon^2}{\mu} w \frac{\partial w}{\partial z} = -1 - \frac{\partial P}{\partial z} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \epsilon u \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{1}{\mu} w \quad z = \epsilon\zeta \quad (2.12)$$

$$w = 0 \quad z = -1 \quad (2.13)$$

En intégrant suivant la verticale les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement horizontal, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial hU}{\partial x} &= 0 \\ \epsilon \frac{\partial U}{\partial t} + \epsilon^2 U \frac{\partial U}{\partial x} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_{-1}^{\epsilon\zeta} (u^2 - U^2) dz \right) &= -\frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_{-1}^{\epsilon\zeta} P dz \right), \end{aligned}$$

où  $U = \frac{1}{h} \left( \int_{-1}^{\epsilon\zeta} u dz \right)$  est la vitesse moyenne dans la colonne d'eau.

L'équation de conservation de la quantité de mouvement verticale nous donne :

$$-\frac{\partial P}{\partial z} = 1 + \epsilon\Gamma,$$

avec  $\Gamma = \Gamma(t, x, z) = \frac{\partial w}{\partial t} + \epsilon u \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\epsilon}{\mu} w \frac{\partial w}{\partial z}$  l'accélération verticale des particules du fluide.

En intégrant cette équation entre  $z$  et  $\epsilon\zeta$  on obtient :

$$P = \epsilon\zeta - z + \epsilon \int_z^{\epsilon\zeta} \Gamma(t, x, \xi) d\xi$$

d'où

$$\int_{-1}^{\epsilon\zeta} P dz = \frac{1}{2} h^2 + \epsilon \int_{-1}^{\epsilon\zeta} \left( \int_z^{\epsilon\zeta} \Gamma(t, x, \xi) d\xi \right) dz.$$

Par intégration par partie, on a :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{\epsilon\zeta} \left( \int_z^{\epsilon\zeta} \Gamma(t, x, \xi) d\xi \right) dz &= \left[ z \left( \int_z^{\epsilon\zeta} \Gamma(t, x, \xi) d\xi \right) \right]_{-1}^{\epsilon\zeta} - \int_{-1}^{\epsilon\zeta} -z\Gamma(t, x, z) dz \\ &= \int_{-1}^{\epsilon\zeta} \Gamma(t, x, z) dz + \int_{-1}^{\epsilon\zeta} z\Gamma(t, x, z) dz \\ &= \int_{-1}^{\epsilon\zeta} (z+1)\Gamma(t, x, z) dz, \end{aligned}$$

et donc :

$$\int_{-1}^{\epsilon\zeta} P dz = \frac{1}{2} h^2 + \epsilon \int_{-1}^{\epsilon\zeta} (z+1)\Gamma(t, x, z) dz.$$

Les équations intégrées suivant la verticale s'écrivent donc :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial hU}{\partial x} = 0 \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \epsilon U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_{-1}^{\epsilon \zeta} (u^2 - U^2) dz \right) = -\frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_{-1}^{\epsilon \zeta} (z+1) \Gamma dz \right) \quad (2.15)$$

Ce système d'équations est exact, mais il n'est pas fermé. L'écoulement étant supposé irrotationnel (équation (2.9)), nous pouvons introduire le potentiel des vitesses  $\Phi$  ( $\mathbf{v} = \nabla \Phi$ ). Afin d'estimer les termes inconnus, nous utilisons une méthode de perturbation en fonction du petit paramètre  $\mu$ . Le potentiel est décomposé sous la forme :

$$\Phi = \sum_{j=0}^N \mu^j \Phi_j.$$

L'équation (2.8) s'écrit alors de la manière suivante :

$$\mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

et donc

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z^2} + \mu \left( \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} \right) + O(\mu^2) = 0.$$

On en déduit que

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} = 0. \end{cases}$$

La première égalité implique que  $\frac{\partial \Phi_0}{\partial z} = c_1(x, t)$ . D'après la condition limite au fond (2.13),  $\frac{\partial \Phi_0}{\partial z} = 0$  et donc :

$$\Phi_0 = \Phi_0(x, t) = \Phi(z = \epsilon \zeta).$$

La seconde relation nous donne alors :

$$\Phi_1 = -\frac{1}{2}((z+1)^2 - h^2) \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2},$$

d'où

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = u_0 - \frac{\mu}{2}((z+1)^2 - h^2) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + O(\mu^2), \quad (2.16)$$

avec  $u_0 = \frac{\partial \Phi_0}{\partial x}$ . En intégrant suivant la colonne d'eau puis en divisant par  $h$ , on obtient la vitesse moyenne  $U$  :

$$U = u_0 + \frac{\mu}{3} h^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + O(\mu^2).$$

En réinjectant cette expression dans la relation (2.16) on trouve :

$$u = U - \frac{\mu}{2}(z+1)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\mu}{6} h^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + O(\mu^2), \quad (2.17)$$

et donc :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{\epsilon\zeta} (u^2 - U^2) dz &= -\mu U \int_{-1}^{\epsilon\zeta} \left( \frac{1}{2}(z+1)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{1}{6} h^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) dz + O(\mu^2), \\ &= 0 + O(\mu^2). \end{aligned}$$

Ce terme peut être négligé dans l'équation (2.15). Le terme non-hydrostatique est évalué à partir de :

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\mu(z+1) \frac{\partial U}{\partial x} + O(\mu^2),$$

qui conduit à :

$$\Gamma = -\mu(z+1) \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + \epsilon U \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \epsilon \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 \right). \quad (2.18)$$

Finalement on trouve le système de S-GN 1D, entièrement non-linéaire et faiblement dispersif (toujours pour fond plat) :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial hU}{\partial x} = 0 \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \epsilon U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \mu \mathcal{D}, \quad (2.20)$$

avec

$$\mathcal{D} = \frac{1}{3h} \frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + \epsilon U \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \epsilon \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 \right) \right). \quad (2.21)$$

On trouvera la dérivation formelle générale des équations de S-GN pour fond variable en 1D dans *Cienfuegos et al.* (2006) et en 2D dans *Lannes and Bonneton* (2009).

**Solutions exactes** Ces équations admettent des solutions exactes sur fond plat sous forme d'ondes solitaires et d'ondes périodiques. L'onde solitaire solution des équations de S-GN est définie par

$$h(x, t) = h_0 + H \operatorname{sech}^2(\kappa(x - ct)), \quad (2.22a)$$

$$U(x, t) = c \left( 1 - \frac{h_0}{h(x, t)} \right), \quad (2.22b)$$

$$\kappa = \frac{\sqrt{3H}}{2h_0 \sqrt{h_0 + H}}, \quad (2.22c)$$

$$c = \sqrt{g(h + H)}, \quad (2.22d)$$

où  $h_0$  représente le niveau d'eau moyen,  $H$  la hauteur de la vague et  $\operatorname{sech}(x) = 1/\cosh(x)$ .



*Serre* (1953) a de plus montré que les équations de S-GN admettaient une famille de solutions périodiques (voir aussi *Carter and Cienfuegos*, 2011), définies par :

$$h(x, t) = a_0 + a_1 \operatorname{dn}^2(\kappa(x - ct), k), \quad (2.23a)$$

$$U(x, t) = c \left( 1 - \frac{h_0}{h(x, t)} \right), \quad (2.23b)$$

$$\kappa = \frac{\sqrt{3a_1}}{2\sqrt{a_0(a_0 + a_1)(a_0 + (1 - k^2)a_1)}}, \quad (2.23c)$$

$$c = \frac{\sqrt{ga_0(a_0 + a_1)(a_0 + (1 - k^2)a_1)}}{h_0}, \quad (2.23d)$$

où  $k \in [0, 1]$ ,  $a_0 > 0$ ,  $a_1 > 0$  sont des paramètres réels. Dans l'équation (2.23)  $\operatorname{dn}(\cdot, k)$  est la fonction elliptique de Jacobi de module  $k$ . Afin de permettre le calcul des ondes cnoidales en terme de hauteur de vague,  $H$ , de période,  $T$  et de hauteur d'eau moyenne,  $h_0$ , les différents paramètres de cette solution peuvent être mis en relation avec les variables physiques. Ceci est possible en utilisant le système d'équations suivant (*Carter and Cienfuegos*, 2011) :

$$\begin{cases} a_1 = \frac{H}{k^2} \\ a_0 = h_0 - a_1 \frac{E(k)}{K(k)} \\ \hat{\omega}^2 = \frac{3\pi^2 g a_1}{4 [a_0 K(k) + a_1 E(k)]^2}, \end{cases} \quad (2.24)$$

où  $\hat{\omega} = 2\pi/T$  est la fréquence angulaire, et  $K(k)$  et  $E(k)$  sont les intégrales elliptiques complètes de première et de seconde espèce.

### 2.2.3 Paramétrisation du déferlement

Les équations de Boussinesq ne peuvent pas être appliquées directement à la description des vagues en zone de surf parce qu'elles n'incluent pas de mécanismes permettant la dissipation d'énergie due au déferlement. Celle-ci doit donc être introduite artificiellement par le biais de paramétrisations. Plusieurs approches ont été développées, mais nécessitent d'une manière générale :

- l'ajout de termes additionnels dans les équations du mouvement responsables d'un déficit local en quantité de mouvement au niveau du front déferlé ;
- des critères pour déterminer quand activer ou désactiver les termes additionnels ;
- une méthode pour suivre les vagues individuellement à partir du point de déferlement car les paramétrisations dépendent généralement de l'"âge" du front déferlant ;
- une calibration fine des différents paramètres introduits dans le modèle de déferlement afin que la dissipation introduite artificiellement soit en accord avec les observations en zone de surf.

Les termes additionnels permettant la dissipation au niveau des fronts sont issus principalement de deux approches. La première est basée sur le concept de roller, initialement développé par *Schäffer et al.* (1993). Le roller physique est paramétrisé en introduisant une masse d'eau isolée du reste du fluide se déplaçant à la surface du front avec la célérité de la vague. L'influence de ce roller, d'épaisseur  $\delta$  (cf. Figure 2.4), est prise en compte via une modification du profil vertical des vitesses de la forme :

$$\begin{cases} u = c_b & \text{pour } \zeta - \delta \leq z \leq \zeta, \\ u = u_0 & \text{pour } -h_0 + b \leq z \leq \zeta - \delta, \end{cases} \quad (2.25)$$

avec  $u_0$  la vitesse dans la partie principale du fluide, et  $c_b$  la célérité du roller. Les équations du mouvement sont alors corrigées de façon à prendre en compte l'excès de quantité de mouvement dû à la non-uniformité du profil de vitesse. Au final, ces modifications aboutissent en l'ajout d'un terme supplémentaire dans les équations de conservation de la quantité de mouvement, dépendant entre autres de la géométrie du roller et de la paramétrisation de la célérité. Cette méthode a été étendue à deux dimensions par *Sørensen et al.* (1994).

Une autre approche, initialement proposée par *Zelt* (1991) et *Karambas and Koutitas* (1992), consiste à utiliser un modèle de turbulence pour dissiper l'énergie au niveau du front. Des termes de diffusion visqueuse sont introduits dans les équations du mouvement, induisant un déficit local de quantité de mouvement au niveau du front. Les premières versions de ces modèles ne permettaient pas la préservation de la quantité de mouvement de manière globale, aboutissant à de mauvaises estimations des variations du niveau moyen ou set-up. Cette paramétrisation a ensuite été améliorée par *Kennedy et al.* (2000) de façon à conserver la quantité de mouvement à l'échelle globale, permettant d'obtenir une bonne description de trains de vagues périodiques à la fois en terme de décroissance de l'amplitude des vagues et de set-up.

Récemment, *Cienfuegos et al.* (2010) ont mis en évidence un certain nombre de limitations de la paramétrisation du déferlement de *Kennedy et al.* (2000). En particulier, ils ont montré que le modèle permettait difficilement d'obtenir à la fois une bonne décroissance de la hauteur du front en zone de surf et une bonne représentation de la vague en terme de forme (asymétrie et pente du front). Ces observations ont conduit *Cienfuegos et al.* à développer une nouvelle approche, qui peut être vue comme une extension des modèles de *Zelt* (1991) et de *Kennedy et al.* (2000). En introduisant des termes de diffusion visqueuse à la fois dans les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, la nouvelle paramétrisation de *Cienfuegos et al.* (2010) permet d'obtenir une très bonne description de la transformation des vagues déferlées. Cependant, la complexité de cette approche rend l'extension à deux dimensions horizontales difficile.

Concernant les critères d'initiation et d'arrêt du déferlement, les plus communément utilisés sont basés sur la pente du front déferlé (*Schäffer et al.*, 1993) et sur des gradients

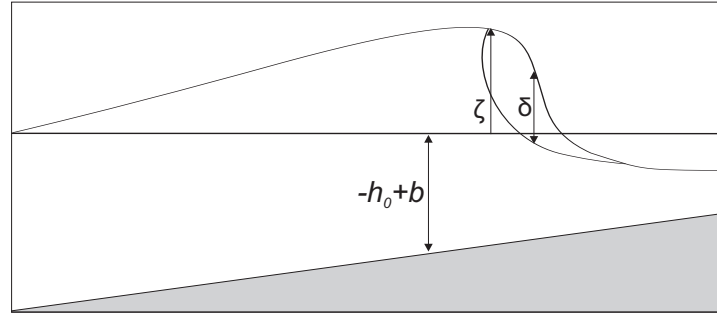


FIGURE 2.4 – Schéma de définition du roller

de vitesse limite au niveau du front (*Zelt*, 1991; *Kennedy et al.*, 2000).

## 2.3 Modèles basés sur les équations de Saint-Venant

Les équations de Saint-Venant (SV), appelées aussi *Nonlinear Shallow Water equations*, correspondent aux équations de S-GN présentées précédemment sans le terme  $\mu\mathcal{D}$  représentant les effets dispersifs et non-hydrostatiques :

$$\begin{aligned}\partial_t h + \nabla \cdot (h\mathbf{V}) &= 0 \\ \partial_t \mathbf{V} + \epsilon(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} + \nabla\zeta &= 0.\end{aligned}$$

De nombreuses études ont permis de montrer que ces équations non-linéaires et non-dispersives étaient particulièrement adaptées à la description de la zone de surf et de jet de rive (*Hibberd and Peregrine*, 1979; *Kobayashi et al.*, 1989; *Cox*, 1995; *Bonneton*, 2007; *Brocchini and Dodd*, 2008).

Négliger les termes d'ordre  $\mu$  signifie faire deux hypothèses importantes. Cela implique tout d'abord de considérer que les variations verticales de la vitesse horizontale sont négligeables :  $u(z, x, t) = U(x, t) + O(\mu)$  (voir relation (2.17)). De plus, l'accélération verticale doit être suffisamment faible pour que les effets non-hydrostatiques puissent être négligés (voir relation (2.18)). Des expériences en laboratoire comme celles de *Ting and Kirby* (1996) et *Cox* (1995) ont montré que, mis à part au niveau des fronts, la variation verticale de l'écoulement était négligeable en zone de surf interne. De plus, les simulations numériques de *Lin and Liu* (1998) ont montré que la distribution de pression pour du déferlement renversant était pratiquement hydrostatique dans les parties régulières des vagues en zone de surf, et que l'écart à la pression hydrostatique au niveau du front de vague était de seulement 7%. Il est donc naturel de négliger les termes dispersifs et non-hydrostatiques en zone de surf interne, en tout cas pour les parties régulières de l'écoulement.

La description des fronts déferlés est rendue possible par l'utilisation du caractère hyperbolique des équations de SV, qui permet la formation et la propagation de solutions discontinues, ou chocs. En assimilant les vagues déferlées typiquement observées en zone

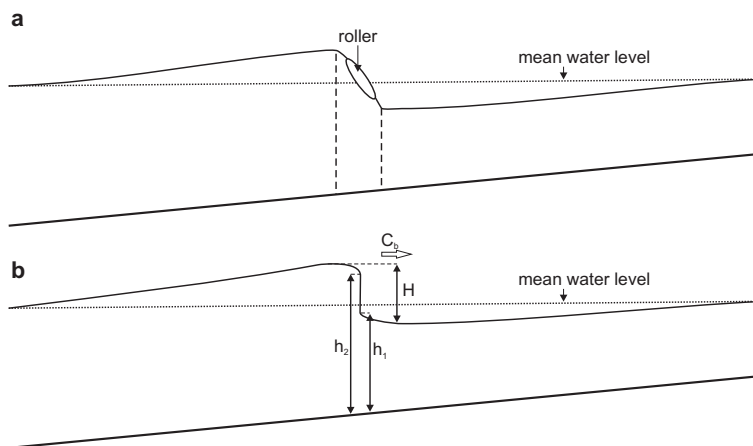


FIGURE 2.5 – Représentation de la vague dans le cadre de la théorie des chocs. (a) Vague déferlée. (b) Représentation schématique. Adaptée de *Bonneton* (2007).

de surf interne (vagues très raides dites en "dent de scie") à des chocs, ces équations peuvent alors gérer intrinsèquement la propagation des vagues déferlées (voir Figure 2.5). Contrairement aux modèles de type Boussinesq, les modèles basés sur les équations de SV ne nécessitent donc pas l'ajout d'une paramétrisation artificielle du déferlement, à partir du moment où les méthodes numériques utilisées pour les résoudre sont adaptées (utilisation de schémas à capture de chocs). De plus, ces modèles permettent de décrire les mouvements de la ligne d'eau de manière simple, la limite zone mouillée/zone sèche étant gérée comme n'importe quelle autre discontinuité.

Dans cette partie, nous présenterons dans un premier temps quelques propriétés intéressantes de ces équations. Le développement de chocs sera tout d'abord illustré à partir d'un cas académique, celui d'une onde simple se propageant sur fond plat (§2.3.1.1). Les propriétés des fronts d'ondes représentés par des chocs seront ensuite présentées dans la partie 2.3.1.2. Nous discuterons enfin le domaine de validité de ces équations (§2.3.2).

### 2.3.1 Propriétés des équations de Saint-Venant

#### 2.3.1.1 Transformations d'une onde simple sur fond plat

Afin d'expliquer le développement de chocs simplement, nous considérons le cas d'une onde 1D se propageant sur fond plat ( $b = 0$ , et donc  $h = h_0 + \zeta$ ) dans la direction des  $x$  positifs. Les équations de SV dimensionnées s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hU) = 0, \\ \partial_t U + U\partial_x U + g\partial_x h = 0. \end{cases} \quad (2.26)$$

Ces équations constituent un système strictement hyperbolique à condition que  $h > 0$ . Introduisons la célérité  $c = \sqrt{gh}$ . En utilisant  $g\partial_x h = 2c\partial_x c$ , les équations (2.26)

deviennent :

$$\partial_t(2c) + c\partial_x U + 2U\partial_x c = 0, \quad (2.27)$$

$$\partial_t(U) + U\partial_x U + 2c\partial_x c = 0. \quad (2.28)$$

En additionnant et soustrayant (2.27) et (2.28) nous obtenons le système équivalent suivant, constitué de deux équations caractéristiques :

$$[\partial_t + (U + c)\partial_x](U + 2c) = 0, \quad (2.29)$$

$$[\partial_t + (U - c)\partial_x](U - 2c) = 0. \quad (2.30)$$

Ces équations indiquent que les quantités  $(U + 2c)$  et  $(U - 2c)$  se propagent aux vitesses  $U + c$  et  $U - c$ . Autrement dit, les quantités  $(U + 2c)$  et  $(U - 2c)$  vérifient les relations :

$$\begin{cases} U + 2c = cste = \alpha^+ & \text{le long de } \mathcal{C}^+, \\ U - 2c = cste = \alpha^- & \text{le long de } \mathcal{C}^-, \end{cases} \quad (2.31)$$

avec les deux jeux de courbes  $\mathcal{C}^+$  et  $\mathcal{C}^-$  définis par :

$$\begin{cases} \mathcal{C}^+ : \frac{dx}{dt} = U + c, \\ \mathcal{C}^- : \frac{dx}{dt} = U - c. \end{cases} \quad (2.32)$$

Plaçons nous maintenant dans le cas d'une onde se propageant dans la direction des  $x$  positifs dans un plan d'eau initialement au repos ( $U_0 = 0$ ). La conservation de l'invariant  $\alpha^- = U - 2c$  donne alors  $U - 2c = -2c_0$ , où  $c_0 = gh_0^{1/2}$ . Les équations (2.29) et (2.30) sont alors équivalentes à une équation dépendant de  $U$  seulement (*Dingemans, 1997*) :

$$\left[ \partial_t + \left( \frac{3}{2}U + c_0 \right) \partial_x \right] U = 0, \quad (2.33)$$

équivalent à une simple équation de Burger lorsque l'on se place dans le référentiel  $\mathcal{R}$  se déplaçant à la vitesse  $c_0$  (*Bonneton, 2001*) :

$$\left[ \partial_t + \left( \frac{3}{2}U \right) \partial_x \right] U = 0. \quad (2.34)$$

Ces équations admettent comme solution l'onde simple (toujours dans le référentiel  $\mathcal{R}$ )

$$\begin{cases} U(x, t) = f\left(x - \left(\frac{3}{2}U\right)t\right), \\ U(x, 0) = f(x). \end{cases} \quad (2.35)$$

La vitesse de propagation de l'information est donc proportionnelle à  $U$ . La crête de la vague se propage plus vite que le creux ( $U_{crete} > U_{creux}$ ), provoquant le raidissement de l'onde. Afin d'étudier plus précisément le comportement de cette solution, examinons sa dérivée par rapport à  $x$  :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{f'}{1 + \frac{3}{2}tf'},$$

## 2 - Modélisation instationnaire des vagues en zone littorale

avec  $f'$  la dérivée de  $f$  par rapport à son argument. Au niveau du front de la vague (qui se dirige dans le sens des  $x$  positifs), la pente est négative :  $f' < 0$ . Nous avons alors :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{|f'|}{1 - \frac{3}{2}t|f'|}.$$

et donc :

$$\frac{\partial U}{\partial x} \rightarrow -\infty \text{ lorsque } t \rightarrow \frac{2}{3|f'|}.$$

Le front de la vague va donc se raidir jusqu'à ce qu'il devienne vertical. Les chocs vont d'abord se former aux points du front  $x_s$  où la pente était maximale à l'instant  $t = 0$ . Ils se produisent à l'instant  $t_s = \frac{2}{3|f'(x_s)|}$ .

Prenons l'exemple d'une onde sinusoïdale se propageant sur fond plat (Figure 2.6, colonne de gauche) dans un domaine périodique de longueur égale à sa longueur d'onde. La vague se raidit progressivement en conservant sa symétrie initiale, la vitesse de propagation de l'information étant proportionnelle à  $U$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  (Figure 2.6a,b). Les chocs commencent à se former au "centre" du front. La discontinuité continue à se développer (Figure 2.6c,d) jusqu'à ce que la vague ait atteint une forme dite en dent de scie, qui correspond à l'état saturé du front. Une fois cette forme en dent de scie atteinte, l'onde va garder cette forme tout en dissipant son énergie (voir Figure 2.6e,f).

Ces équations permettent donc de décrire la forme caractéristique des vagues en zone de surf interne. Les propriétés des vagues déferlées assimilées à des chocs seront étudiées dans la partie 2.3.1.2.

### 2.3.1.2 Chocs et dissipation

Dans cette section, nous présentons le concept de chocs appliqué à la description des fronts d'ondes en zones de surf interne et de jet de rive (cf. *Stocker, 1957*). Nous considérons donc que les vagues déferlées peuvent être décrites par des discontinuités (cf. Figure 2.5), et que dans les parties régulières de l'écoulement nous pouvons utiliser les équations de SV, écrites ici sous la forme conservative :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hU) = 0, \\ \partial_t(hU) + \partial_x(hU^2 + \frac{1}{2}gh^2) + gh\partial_x b = 0. \end{cases} \quad (2.36)$$

Les fronts déferlants ne peuvent pas satisfaire l'équation (2.36) au sens où on l'entend habituellement, les dérivées n'étant pas définies au niveau des discontinuités. Nous utilisons le concept de solutions faibles (*Whitham, 1974*). Nous considérons alors la forme intégrale de ces équations, qui reste valable en présence de discontinuités. On considère alors la portion de fluide comprise entre deux plans verticaux, définis par  $x = x_a(t)$  et  $x = x_b(t)$ , situés de part et d'autre d'une discontinuité (en  $x = x_s(t)$ ) et se déplaçant en même temps que le fluide. Après intégration entre  $x_a(t)$  et  $x_b(t)$ , les lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement s'écrivent :

$$\int_{x_a}^{x_s} \left( \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hU}{\partial x} \right) dx + \int_{x_s}^{x_b} \left( \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hU}{\partial x} \right) dx + [hU] - c_b[h] = 0 \quad (2.37)$$

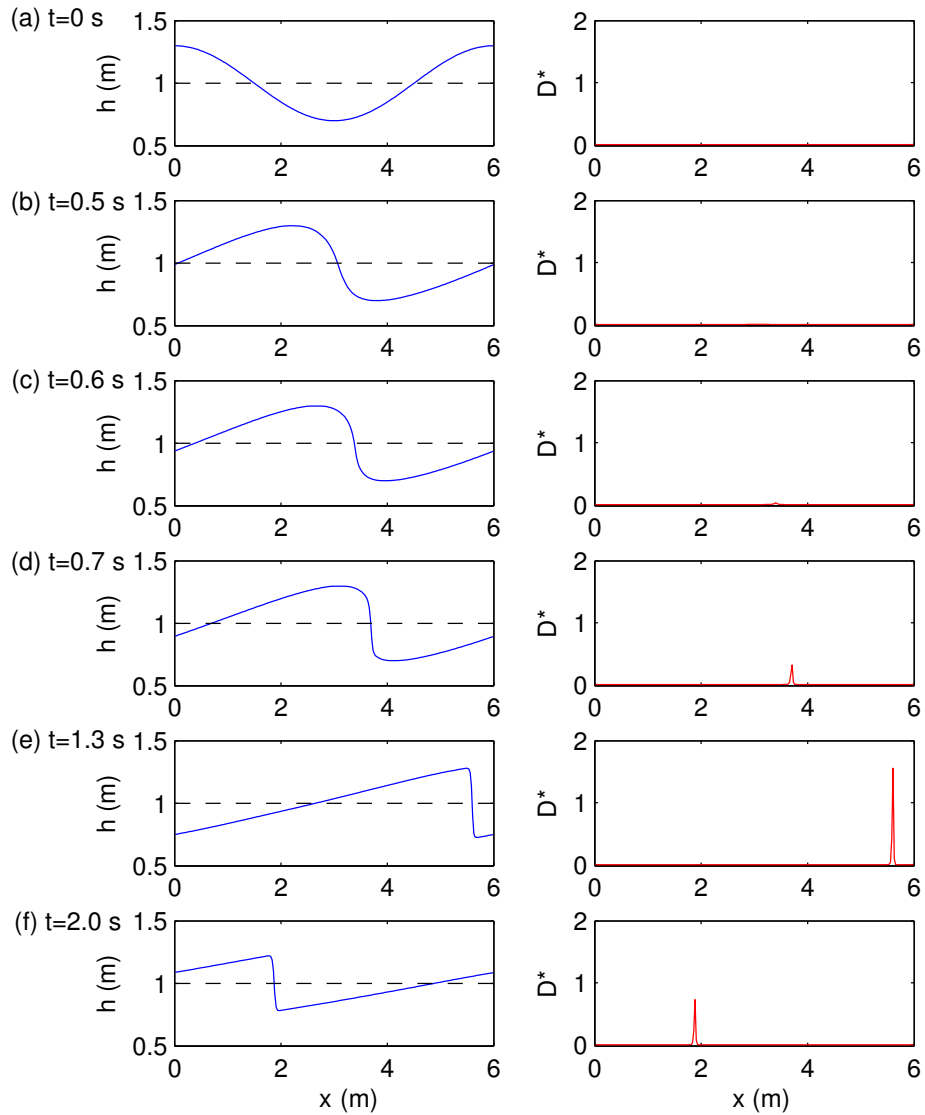


FIGURE 2.6 – Onde sinusoïdale ( $a = 0.3\text{m}$ ;  $h_0 = 1\text{m}$ ;  $\lambda = 6\text{m}$ ) se propageant sur fond plat gouvernée par les équations de SV (code SURF-GN sans termes dispersifs). Colonne de gauche : surface libre à différents instants. Colonne de droite : dissipation locale adimensionnée  $D^* = D(x, t)/(\rho g c_0 h_0)$ , avec  $c_0 = \sqrt{gh_0}$ .

$$\int_{x_a}^{x_s} \left( \frac{\partial}{\partial t} hU + \frac{\partial}{\partial x} \left( hU^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right) \right) dx + \int_{x_s}^{x_b} \left( \frac{\partial}{\partial t} hU + \frac{\partial}{\partial x} \left( hU^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right) \right) dx + \left[ hU^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right] - c_b [hU] = - \int_{x_a}^{x_b} gh \frac{\partial b}{\partial x} dx \quad (2.38)$$

où  $[\ ]$  représente un saut de la quantité et  $c_b$  la célérité du choc défini par  $c_b = \frac{dx_s}{dt}$ . Les conditions de saut sont obtenues en faisant tendre la taille du domaine vers 0, de façon à ce que la discontinuité reste à l'intérieur du domaine ( $x_a \rightarrow x_s^-$  et  $x_b \rightarrow x_s^+$ ). Nous obtenons alors :

$$-c_b[h] + [hu] = 0, \quad (2.39)$$

$$-c_b[hU] + \left[ hU^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right] = 0, \quad (2.40)$$

ou de façon équivalente

$$u_1 - c_b = \epsilon_s \left( \frac{gh_2}{2h_1} (h_1 + h_2) \right)^{1/2}, \quad (\epsilon_s = \pm 1) \quad (2.41)$$

$$u_2 - c_b = \epsilon_s \left( \frac{gh_1}{2h_2} (h_1 + h_2) \right)^{1/2}, \quad (2.42)$$

où  $h_1$  et  $h_2$  sont respectivement les hauteurs d'eau devant et derrière le front (cf. Figure 2.5), et  $u_1$  et  $u_2$  les vitesses moyennées sur la verticale correspondantes. Deux solutions sont possibles suivant le signe de  $\epsilon_s$ . Cette non-unicité des solutions faibles des équations de SV s'explique par le fait que certains phénomènes physiques ont été négligés dans nos lois de conservation, comme la turbulence dans le front d'onde par exemple. Il est donc nécessaire d'utiliser notre connaissance de ce qui a été négligé pour trouver la bonne solution, c'est-à-dire celle qui a un sens physique. Cela mène à l'introduction d'une condition supplémentaire, dite condition d'entropie par analogie à la dynamique des gaz. Dans notre problème, cette condition est basée sur le fait que l'énergie n'est pas conservée à travers le front d'onde.

Dans les parties continues de l'écoulement, les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement (2.36) nous permettent d'obtenir :

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} = 0, \quad (2.43)$$

avec  $\mathcal{E} = \frac{\rho}{2}(hU^2 + g\zeta^2)$  la densité d'énergie sur une colonne d'eau et  $\mathcal{F} = \rho hU \left( \frac{U^2}{2} + g\zeta \right)$  le flux d'énergie. En absence de discontinuité, il y a donc bien conservation de l'énergie.

Le taux de dissipation de l'énergie due à la présence du choc s'écrit :

$$\begin{aligned} D_b &= - \int_{x_a}^{x_b} \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} \right) dx, \\ &= - \int_{x_a}^{x_s} \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} \right) dx + \int_{x_s}^{x_b} \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} \right) - [\mathcal{F}] + c_b[\mathcal{E}], \\ &= -[\mathcal{F}] + c_b[\mathcal{E}]. \end{aligned}$$



En utilisant les conditions de sauts (2.41) et (2.42), nous obtenons :

$$D_b = -\epsilon_s \frac{\rho g}{4} \left( \frac{g(h_1 + h_2)}{2h_1 h_2} \right)^{1/2} (h_2 - h_1)^3.$$

Les particules perdent de l'énergie lorsqu'elles traversent le choc, et donc  $D_b > 0$ . Cette inéquation permet d'éliminer les solutions faibles non-physiques en imposant  $\epsilon_s = -1$ . La densité d'énergie  $\mathcal{E}$  représente l'entropie mathématique des équations de Saint-Venant. Les conditions de saut (2.41) et (2.42) donnent alors :

$$u_1 - c_b = - \left( \frac{gh_2}{2h_1} (h_1 + h_2) \right)^{1/2}, \quad (2.44)$$

$$u_2 - c_b = - \left( \frac{gh_1}{2h_2} (h_1 + h_2) \right)^{1/2}, \quad (2.45)$$

et la dissipation dans le choc :

$$D_b = \frac{\rho g}{4} \left( \frac{g(h_1 + h_2)}{2h_1 h_2} \right)^{1/2} (h_2 - h_1)^3. \quad (2.46)$$

La Figure 2.6 montre l'évolution de la dissipation locale  $D(x, t) = - \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} \right)$  calculée par le modèle numérique SV pour la même onde sinusoïdale que précédemment. Cette dissipation est nulle à  $t = 0$ , et reste nulle tant que les chocs ne se sont pas formés (Figure 2.6a,b). La dissipation forme ensuite un pic au niveau des discontinuités. L'évolution temporelle de l'énergie dissipée au niveau du front,  $\int_{front} D(x, t) dx$ , est présentée Figure 2.7a (après adimensionnalisation). On peut distinguer plusieurs phases dans l'évolution de la dissipation. Au début du déferlement, elle augmente très rapidement, jusqu'à ce que le front déferlant atteigne l'état saturé ( $h_2 - h_1 = H$ ,  $t = 1.05s$ ). Cette première phase peut être vue comme l'équivalent de la zone de transition pour des vagues physiques. La quantité d'énergie dissipée a alors atteint un maximal local, et diminue ensuite progressivement, en même temps que le front d'onde décroît en amplitude ( $D_b \propto (h_2 - h_1)^3$ ). La Figure 2.7b présente l'évolution temporelle du rapport  $\int_{front} D(x, t) dx / D_b$ , avec  $D_b$  la dissipation théorique décrite en (2.46) calculée en approximant  $h_2$  et  $h_1$  par  $h_{max}$  et  $h_{min}$ , c'est-à-dire en faisant l'hypothèse d'un front saturé. La dissipation normalisée est proche de zéro avant déferlement, proche de un lorsque le front est saturé.

Les équations de Saint-Venant, associées au concept de solution faible, permettent donc de décrire la dissipation d'énergie au niveau des fronts d'onde. Des études numériques (*Hibberd and Peregrine*, 1979; *Kobayashi et al.*, 1989; *Cox*, 1995; *Bonneton*, 2007) appliquées à la dynamique en zone de surf interne ont montré que la dissipation donnée par l'équation (2.46) est en bon accord avec la réalité physique. La figure 2.8 montre un exemple d'application d'un modèle numérique SV SURF-WB à l'étude de la

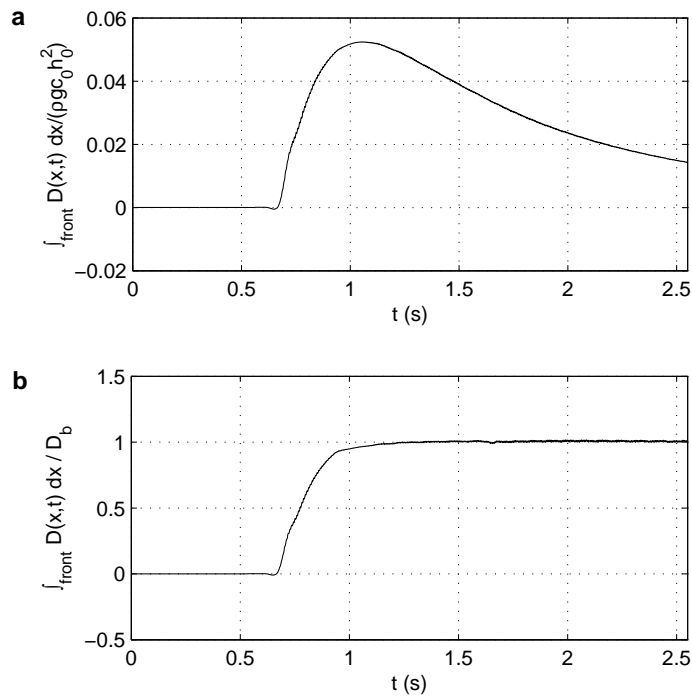


FIGURE 2.7 – Onde sinusoïdale se propageant sur un fond plat décrite par les équations de SV. (a) Evolution temporelle de l'énergie dissipée dans le front (adimensionnée)  $\int_{\text{front}} D(x,t) dx / (\rho g h_0^2 c_0)$ . (b) Evolution temporelle de la dissipation au niveau du front normalisée par la dissipation théorique  $D_b$  (courbes filtrées en haute fréquence).

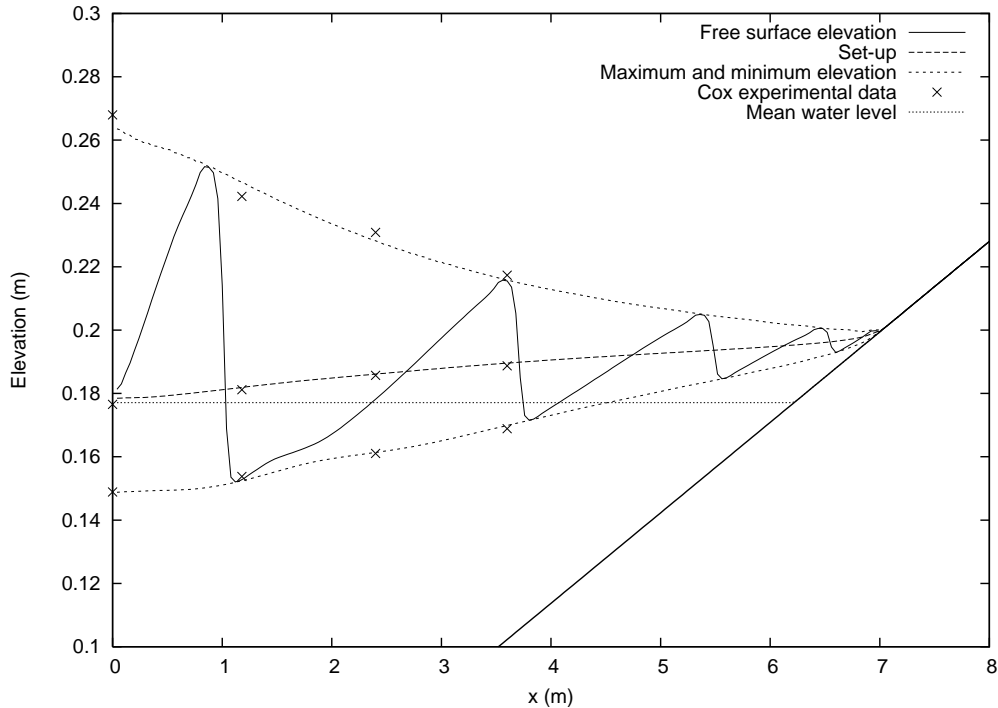


FIGURE 2.8 – Profil spatial d’élévation de la surface libre calculé par le modèle SV SURF-WB pour les expériences sur houle périodique de *Cox* (1995) et comparaison avec les données expérimentales (figure issue de *Marche*, 2005).

dynamique des vagues en zone de surf interne. La simulation correspond aux expériences sur vagues périodiques de *Cox* (1995). On peut voir que le modèle donne de très bons résultats en terme de variations spatiales de l’élévation des crêtes, de l’élévation des creux ainsi que du niveau moyen, indication d’un taux d’énergie dissipé au niveau du front réaliste.

### 2.3.2 Limites d’applicabilité du modèle

La non-prise en compte des effets dispersifs restreint de manière importante le domaine de validité des équations de SV, qui ne peuvent généralement pas être utilisées pour décrire la dynamique des vagues avant le déferlement.

La limitation la plus évidente vient du fait qu’une onde gouvernée par les équations de SV finira toujours par se raidir, et cela même sur fond plat (cf. §2.3.1.1 pour un cas simplifié). Ces équations ne permettent donc pas la propagation de solutions de forme constante, contrairement aux équations de S-GN. Le système d’équation ne permet pas non plus de décrire le phénomène de levée de la vague avant le déferlement. En conséquence, les vagues déferlent généralement beaucoup plus tôt que ce qui est observé expérimentalement. Ce phénomène est illustré Figure 2.9, où les profils spatiaux calculés par des modèles numériques SV et S-GN sont comparés dans le cas d’une onde solitaire se propageant sur une plage à pente constante (simulations correspondant aux expériences de *Synolakis*, 1987). L’onde gouvernée par les équations de SV se raidit et déferle

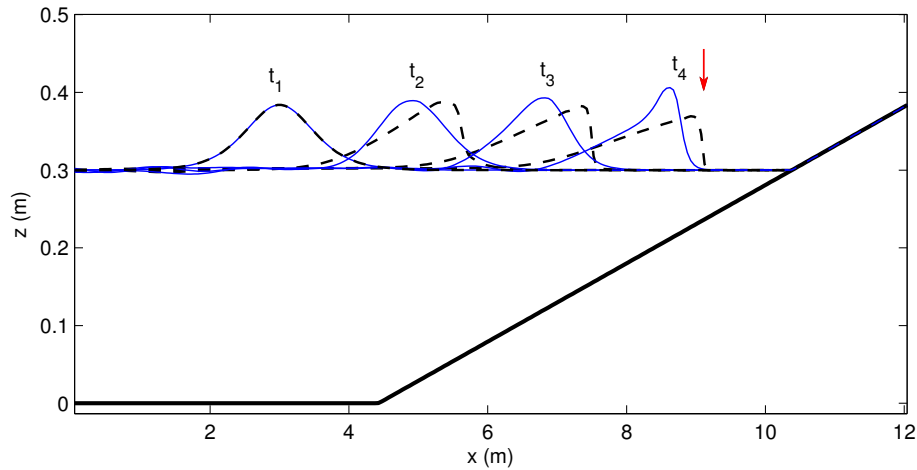


FIGURE 2.9 – Transformations d’une onde solitaire sur une plage à pente constante ( $a/h_0 = 0.28$ ). (—) : Modèle basé sur les équations de S-GN (code SURF-GN); (- -) : Modèle basé sur les équations de SV (SURF-GN sans les effets dispersifs). Flèche : position approximative du point de déferlement observé expérimentalement.  $t_1 = 0$  s ;  $t_2 = 1$  s ;  $t_3 = 3$  s ;  $t_4 = 4$  s.

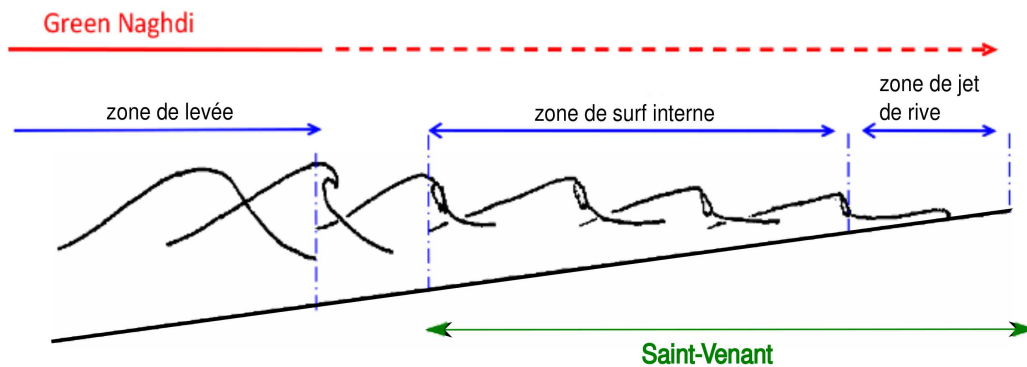


FIGURE 2.10 – Domaines de validité des modèles de type SV et S-GN. Adapté de *Bonneton* (2005).

directement, tandis que celle décrite par les équations de S-GN se raidit plus progressivement et gagne en amplitude avant de déferler, en accord avec les données expérimentales (non-montré).

### 2.4 Vers des modèles hybrides ?

Les équations de S-GN donnent une très bonne description de la dynamique des vagues non-déferlées. Les équations de SV sont elles très efficaces dans les cas où les effets non-linéaires prédominent, et peuvent de plus gérer le déferlement de manière intrinsèque. Les domaines de validité des deux systèmes d’équations sont résumés sur la figure 2.10.

L’approche la plus communément utilisée pour obtenir un modèle valide de la zone

de levée à la zone de jet de rive est celle que nous avons présentée précédemment, c'est-à-dire une extension des équations de S-GN via l'ajout d'une paramétrisation *ad-hoc* de la dissipation. FUNWAVE (Kirby *et al.*, 1998) est un exemple connu de ce type de modèles. Basé sur les équations de Wei *et al.* (1995) et la paramétrisation du déferlement de Kennedy *et al.* (2000), il peut donner une très bonne description de la transformation 2DH des vagues en zone littorale. Cependant, chaque utilisation de ce modèle nécessite la calibration préalable de plusieurs paramètres clés du modèle, comme ceux déterminant la dissipation d'énergie au niveau du front déferlé et les mouvements de la ligne d'eau (Bruno *et al.*, 2009).

La stratégie développée dans cette thèse consiste à étendre le domaine de validité du modèle numérique SV SURF-WB (Marche, 2005; Marche *et al.*, 2007) en ajoutant des termes dispersifs. Les méthodes numériques seront donc développées de manière à conserver les qualités initiales du modèle SV concernant la gestion naturelle de la dissipation des vagues déferlées et la simplicité de la description de la ligne d'eau. Plus précisément, l'idée est de gérer les vagues déferlées par les équations de SV, et de décrire les vagues non-déferlées par les équations de S-GN. Le passage d'un système d'équations à l'autre se fait de façon naturelle, puisque les équations de S-GN dégènerent en équations de SV lorsque les termes dispersifs tendent vers zéro.

De telles méthodes hybrides se sont développées depuis quelques années, mais ont été exclusivement appliquées à des modèles de type Boussinesq faiblement non-linéaires (Weston *et al.*, 2003; Tonelli and Petti, 2009, 2010; Orszaghova *et al.*, 2011). La décomposition entre les deux systèmes d'équations est réalisée de manière spatiale pour la plupart de ces modèles (Weston *et al.*, 2003; Tonelli and Petti, 2009, 2010). Le domaine est partagé en deux zones, pré- et post-déferlement, respectivement gouvernées par les équations de S-GN et de SV. Cette approche donne de très bons résultats dans le cas de vagues régulières sur une plage plane par exemple, ou de manière plus générale lorsque le point de déferlement est fixe dans le temps (cf. Figure 2.11).

En revanche, cette simple décomposition spatiale ne permet pas de décrire précisément les transformations de vagues irrégulières, pour lesquelles la position du point de déferlement varie en fonction du temps. En effet, dans ce cas-là, des vagues alternativement déferlées et non-déferlées peuvent se succéder en un point donné du domaine. Une gestion individuelle du déferlement des vagues est alors nécessaire.

Un premier pas dans ce sens a été réalisé récemment par Orszaghova *et al.* (2011) pour son modèle hybride de type Boussinesq faiblement non-linéaire. A chaque pas de temps, le domaine numérique est décomposé en vagues individuelles par une méthode de *down-crossing*. Un unique critère sur la pente du front est ensuite utilisé pour décider si l'on passe en SV pour une vague donnée. Cependant, aucune méthode permettant l'arrêt du déferlement n'a été implémentée. Le modèle ne peut donc pas s'appliquer par exemple à l'étude de la transformation des vagues au-dessus d'une barre. Cette méthodologie

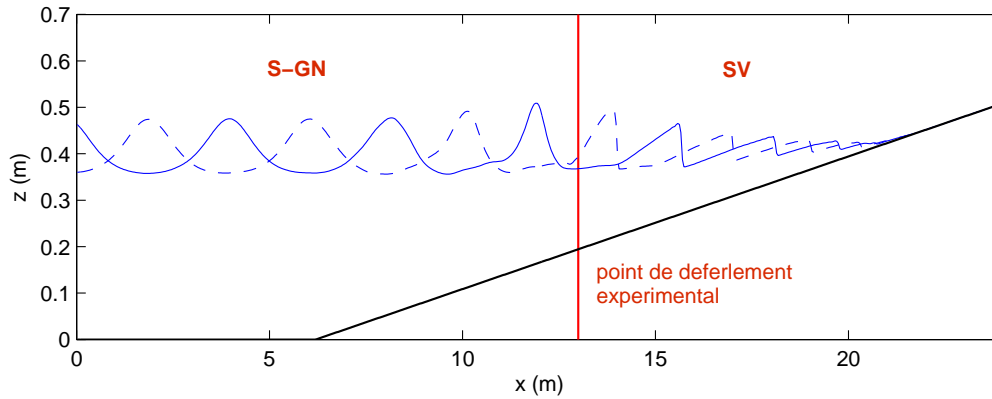


FIGURE 2.11 – Exemple de décomposition spatiale du domaine de calcul entre équations de SV et de S-GN. Ondes cnoïdales se propageant sur une plage à pente fixe. (—) : surface libre à  $t = t_0$ . (- - -) : surface libre à  $t = t_0 + T/2$ . Simulation réalisée avec le code SURF-GN.

est de plus inadaptée à la description de vagues se propageant dans une zone de surf étendue, puisque la pente du front déferlé finirait par passer en dessous du seuil critique d'initiation du déferlement. Beaucoup reste donc à faire pour une gestion efficace du déferlement dans les modèles hybrides.

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons tout d'abord présenté les deux approches classiquement utilisées pour modéliser la dynamique instationnaire non-linéaire des vagues en zone littorale, à savoir les modélisations basées sur les équations de type Boussinesq fortement non-linéaires et sur les équations de Saint-Venant. Nous avons ensuite discuté leurs domaines de validité et limitations respectives.

Nous avons ainsi pu introduire une nouvelle approche de modélisation, dite hybride, dont l'objectif est de coupler les deux approches présentées précédemment en essayant de conserver leurs qualités respectives, à savoir la description "naturelle" des vagues déferlées pour les équations de SV, et la bonne description de la dynamique des vagues avant déferlement pour les équations de type Boussinesq fortement non-linéaires.

Le modèle numérique présenté dans ces travaux de thèse repose sur cette dernière approche. Il est basé sur les équations de S-GN, considérées comme étant les équations fortement non-linéaires faiblement dispersives de base (*Lannes and Bonneton, 2009*). Dans le chapitre suivant, nous présenterons les principales caractéristiques de notre modèle numérique, développé de façon à permettre un couplage naturel avec les équations de SV.

# Chapitre 3

## Présentation du modèle

### 3.1 Introduction

Ce chapitre résume les principales caractéristiques de notre modèle, présenté de manière complète dans *Bonneton et al. (2011d)*. Il est basé sur les équations de S-GN, qui sont tout d'abord reformulées de façon à faciliter leur résolution numérique (§3.2). Une méthode de splitting des équations est alors mise en place, permettant le traitement séparé de la partie hyperbolique des équations et du terme dispersif (§3.3). Les méthodes numériques sont finalement validées dans la partie 3.4.

Les travaux présentés dans ce chapitre sont le fruit de collaborations menées dans le cadre de l'ANR MathOcean. Les développements mathématique et numérique pour la prise en compte des termes dispersifs à l'aide de la méthode de splitting ont été principalement réalisés par Florent Chazel (IMT, Université de Toulouse), David Lannes (DMA, ENS Paris) et Fabien Marche (I3M, université Montpellier 2).

### 3.2 Une nouvelle formulation des équations de S-GN

Dans ce chapitre, nous reprenons les notations présentées sur la figure 2.1 :  $\zeta(t, X)$  est l'élévation de la surface libre par rapport à son état au repos,  $h_0$  la profondeur de référence et  $-h_0 + b(X)$  la cote du fond.  $X$  représente les variables horizontales ( $X = (x, y)$  pour des vagues 2D,  $X = x$  en 1D),  $t$  le temps et  $z$  la coordonnée verticale.  $\mathbf{V}$  est la composante horizontale du champ de vitesse moyenné sur la verticale. Nous avons donc  $\mathbf{V} = (U, V) \in \mathbb{R}^2$  pour des vagues 2D, et  $\mathbf{V} = U \in \mathbb{R}$  pour des vagues 1D.

#### 3.2.1 Equations de S-GN sous leur forme adimensionnée

Les variables sont adimensionnées de la façon suivante :

$$\tilde{X} = \frac{X}{\lambda}, \quad \tilde{t} = \frac{\sqrt{gh_0}}{\lambda} t$$

### 3 - Présentation du modèle

---

et

$$\tilde{\zeta} = \frac{\zeta}{a}, \quad \tilde{b} = \frac{b}{a_f}, \quad \tilde{\mathbf{V}} = \frac{\mathbf{V}}{a\sqrt{g/h_0}}.$$

avec  $a_f$  l'amplitude caractéristique des variations du fond. Nous définissons 3 paramètres adimensionnés caractéristiques

$$\epsilon = \frac{a}{h_0}, \quad \mu = \frac{h_0^2}{\lambda^2}, \quad \beta_f = \frac{a_f}{h_0};$$

$\epsilon$  représente toujours le paramètre non-linéaire et  $\mu$  le caractère dispersif de l'écoulement.  $\beta_f$  caractérise les variations bathymétriques.

Les équations de S-GN peuvent être écrites sous la forme adimensionnée suivante (voir *Lannes and Bonneton, 2009*) (nous omettons les tildes par simplifier les expressions) :

$$\begin{cases} \partial_t \zeta + \nabla \cdot (h\mathbf{V}) = 0, \\ (I + \mu\mathcal{T}[h, b])\partial_t \mathbf{V} + \nabla \zeta + \epsilon(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} + \epsilon\mu\mathcal{Q}[h, b](\mathbf{V}) = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

avec  $h$  la profondeur adimensionnée

$$h = 1 + \epsilon\zeta - \beta_f b.$$

L'opérateur linéaire  $\mathcal{T}[h, b]\cdot$  et la forme quadratique  $\mathcal{Q}[h, b](\cdot)$  sont définis par :

$$\mathcal{T}[h, b]W = \mathcal{R}_1[h, b](\nabla \cdot W) + \beta_f \mathcal{R}_2[h, b](\nabla b \cdot W) \quad (3.2)$$

$$\mathcal{Q}[h, b](W) = \mathcal{R}_1[h, b](\nabla \cdot (W\nabla \cdot W) - 2(\nabla \cdot W)^2) + \beta_f \mathcal{R}_2[h, b]((W \cdot \nabla)^2 b), \quad (3.3)$$

avec pour toute fonction à valeur scalaire  $w$

$$\mathcal{R}_1[h, b]w = -\frac{1}{3h}\nabla(h^3 w) - \beta_f \frac{h}{2}w\nabla b, \quad (3.4)$$

$$\mathcal{R}_2[h, b]w = \frac{1}{2h}\nabla(h^2 w) + \beta_f w\nabla b. \quad (3.5)$$

Afin d'alléger les notations, nous noterons par la suite  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{Q}$ ,  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  au lieu de  $\mathcal{T}[h, b]$ ,  $\mathcal{Q}[h, b]$ , etc.

Il est possible d'intégrer un terme de friction dans la modélisation. Celui-ci est alors ajouté au terme de droite des équations de quantité de mouvement et pourra être négligé ou non suivant les applications. Il a la forme suivante :  $-f\epsilon\mu^{-1/2}\frac{1}{h}\|\mathbf{V}\|\mathbf{V}$ , avec  $f$  un coefficient de friction adimensionné.

#### 3.2.2 Première reformulation des équations

Nous pouvons remarquer que

$$\mathcal{Q}(\mathbf{V}) = \mathcal{T}((\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V}) + \mathcal{Q}_1(\mathbf{V}).$$



En effet, on peut montrer à partir des équations (3.2) et (3.3) que

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_1(\mathbf{V}) &= \mathcal{R}_1(\nabla \cdot (\mathbf{V}\nabla \cdot \mathbf{V} - (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V}) - 2(\nabla \cdot \mathbf{V})^2) \\ &\quad + \beta_f \mathcal{R}_2(\mathbf{V} \cdot (\mathbf{V} \cdot \nabla)\nabla b) \\ &= -2\mathcal{R}_1(\partial_1 \mathbf{V} \cdot \partial_2 \mathbf{V}^\perp + (\nabla \cdot \mathbf{V})^2) + \beta_f \mathcal{R}_2(\mathbf{V} \cdot (\mathbf{V} \cdot \nabla)\nabla b),\end{aligned}$$

avec  $\mathbf{V}^\perp = {}^t(-V_2, V_1)$ . Il est important de noter pour la suite que  $\mathcal{Q}_1(\mathbf{V})$  ne comprend pas de dérivées d'ordre 3, contrairement à  $\mathcal{Q}(\mathbf{V})$ .

On obtient finalement la formulation suivante des équations de S-GN (3.1) :

$$\begin{cases} \partial_t \zeta + \nabla \cdot (h\mathbf{V}) = 0, \\ (I + \mu\mathcal{T})\partial_t \mathbf{V} + \epsilon(I + \mu\mathcal{T})(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} + \nabla \zeta + \epsilon\mu\mathcal{Q}_1(\mathbf{V}) = 0, \end{cases} \quad (3.6)$$

avec  $h = 1 + \epsilon\zeta - \beta_f b$ , et la forme quadratique  $\mathcal{Q}_1$  donnée par :

$$\mathcal{Q}_1[h, b](\mathbf{V}) = -2\mathcal{R}_1(\partial_1 \mathbf{V} \cdot \partial_2 \mathbf{V}^\perp + (\nabla \cdot \mathbf{V})^2) + \beta_f \mathcal{R}_2(\mathbf{V} \cdot (\mathbf{V} \cdot \nabla)\nabla b) \quad (3.7)$$

avec  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  définis par les relations (3.2), (3.4) et (3.5).

### 3.2.3 Amélioration des propriétés dispersives

Une méthode classique pour améliorer les propriétés dispersives du système (3.6) est d'ajouter aux équations de quantité de mouvement des termes bien choisis d'ordre  $O(\mu^2)$ , c'est-à-dire des termes qui ne modifient pas l'ordre d'approximation des équations initiales (*Witting, 1984; Madsen et al., 1991; Cienfuegos et al., 2007*). Nous remarquons tout d'abord que la seconde équation de (3.6) peut s'écrire

$$\partial_t \mathbf{V} = -\nabla \zeta - \epsilon(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} + O(\mu),$$

et donc, pour tout paramètre  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

$$\partial_t \mathbf{V} = \alpha \partial_t \mathbf{V} - (1 - \alpha)(\nabla \zeta + \epsilon(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V}) + O(\mu).$$

En remplaçant  $\partial_t \mathbf{V}$  par cette expression dans (3.6) et en négligeant les termes  $O(\mu^2)$ , on obtient alors :

$$\begin{cases} \partial_t \zeta + \nabla \cdot (h\mathbf{V}) = 0, \\ (I + \mu\alpha\mathcal{T})\partial_t \mathbf{V} + \epsilon(I + \mu\alpha\mathcal{T})(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} \\ \quad + (I - \mu(1 - \alpha)\mathcal{T})\nabla \zeta + \epsilon\mu\mathcal{Q}_1(\mathbf{V}) = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

En prenant  $\alpha = 1$ , on retrouve bien le système (3.6). Le paramètre d'optimisation  $\alpha$  doit être pris égal à 1.159 pour améliorer les propriétés dispersives du modèle en minimisant l'erreur sur la vitesse de phase et de groupe par rapport à la théorie linéaire de Stokes (voir détails dans *Bonneton et al. (2011d)*).

### 3.2.4 Reformulation en terme des variables $(h, h\mathbf{V})$

Nous cherchons maintenant à réécrire les équations de S-GN (3.8) en fonction des variables  $h$  et  $h\mathbf{V}$ . Pour la première équation, il suffit de remarquer que  $\epsilon\partial_t\zeta = \partial_t h$ , et donc

$$\partial_t h + \epsilon\nabla \cdot (h\mathbf{V}) = 0.$$

Pour la seconde équation, nous utilisons tout d'abord cette identité pour réécrire  $h\partial_t\mathbf{V} = \partial_t(h\mathbf{V}) + \epsilon\nabla \cdot (h\mathbf{V})\mathbf{V}$ . Après multiplication de la seconde équation de (3.8) par  $h$ , et en utilisant l'identité

$$\nabla \cdot (h\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) = \nabla \cdot (h\mathbf{V})\mathbf{V} + h(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V},$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} (I + \mu\alpha h\mathcal{T}\frac{1}{h})\partial_t(h\mathbf{V}) + \epsilon(I + \mu\alpha h\mathcal{T}\frac{1}{h})\nabla \cdot (h\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) \\ + (I - \mu(1 - \alpha)h\mathcal{T}\frac{1}{h})h\nabla\zeta + \epsilon\mu h\mathcal{Q}_1(\mathbf{V}) = 0. \end{aligned}$$

Les équations de Green-Naghdi avec propriétés dispersives optimisées peuvent donc s'écrire en fonction des variables  $(h, h\mathbf{V})$  de la façon suivante :

$$\begin{cases} \partial_t h + \epsilon\nabla \cdot (h\mathbf{V}) = 0, \\ (I + \mu\alpha h\mathcal{T}\frac{1}{h})\partial_t(h\mathbf{V}) + \epsilon(I + \mu\alpha h\mathcal{T}\frac{1}{h})\nabla \cdot (h\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) \\ + (I - \mu(1 - \alpha)h\mathcal{T}\frac{1}{h})h\nabla\zeta + \epsilon\mu h\mathcal{Q}_1(\mathbf{V}) = 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Afin d'éviter le calcul direct de dérivées du troisième ordre qui peut être difficile d'un point de vue numérique, ces termes sont factorisés par  $I + \mu\alpha h\mathcal{T}\frac{1}{h}$ , de manière à faire apparaître un terme incluant uniquement des dérivées d'ordre 1 de  $\zeta$  :

$$(I - \mu(1 - \alpha)h\mathcal{T}\frac{1}{h})h\nabla\zeta = \frac{1}{\alpha}h\nabla\zeta + \frac{\alpha - 1}{\alpha}(I + \mu\alpha h\mathcal{T}\frac{1}{h})h\nabla\zeta.$$

Les équations (3.9) peuvent finalement être reformulées sous la forme :

$$\begin{cases} \partial_t h + \epsilon\nabla \cdot (h\mathbf{V}) = 0, \\ \partial_t(h\mathbf{V}) + \epsilon\nabla \cdot (h\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) + \frac{\alpha - 1}{\alpha}h\nabla\zeta \\ + (I + \mu\alpha h\mathcal{T}\frac{1}{h})^{-1}[\frac{1}{\alpha}h\nabla\zeta + \epsilon\mu h\mathcal{Q}_1(\mathbf{V})] = 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

Ces équations peuvent s'écrire sous forme *dimensionnée* de la façon suivante :

$$\begin{cases} \partial_t h + \nabla \cdot (h\mathbf{V}) = 0, \\ \partial_t(h\mathbf{V}) + \nabla \cdot (\frac{1}{2}gh^2) + \nabla \cdot (h\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) + gh\nabla b = \mathcal{D}, \end{cases} \quad (3.11)$$

où  $\mathcal{D}$  représente les termes dispersifs et non-hydrostatiques, et s'écrit

$$\mathcal{D} = \frac{1}{\alpha}gh\nabla\zeta - (I + \alpha h\mathcal{T}\frac{1}{h})^{-1}[\frac{1}{\alpha}gh\nabla\zeta + h\mathcal{Q}_1(\mathbf{V})]. \quad (3.12)$$

Cette formulation ne requiert pas le calcul de dérivées d'ordre trois des variables  $(\zeta, \mathbf{V})$ , et permet ainsi des calculs numériques plus robustes, en particulier en présence de fronts raides. Il est important de noter que pour  $\mathcal{D} = 0$ , nous obtenons les équations de Saint-Venant en variables conservatives. Cette reformulation est donc adaptée à la mise en place d'une méthode de splitting des équations, séparant la partie hyperbolique et la partie dispersive des équations (3.11).

### 3.3 Méthodes numériques

Dans cette partie, nous présentons notre méthode de splitting (§3.3.1), ainsi que les méthodes numériques mises en place pour traiter les parties hyperbolique (§3.3.2) et dispersive (§3.3.3) des équations.

#### 3.3.1 Schéma de splitting

A chaque pas de temps nous décomposons l'opérateur solution  $S(\cdot)$  associé à (3.11) en utilisant le splitting de Strang d'ordre deux :

$$S(\delta_t) = S_1(\delta_t/2)S_2(\delta_t)S_1(\delta_t/2), \quad (3.13)$$

où  $S_1$  et  $S_2$  sont associés respectivement à la partie hyperbolique et dispersive des équations de Green-Naghdi (3.11). De manière plus précise :

- $S_1(t)$  est l'opérateur solution associé aux équations de Saint Venant

$$\begin{cases} \partial_t h + \nabla \cdot (h\mathbf{V}) & = 0, \\ \partial_t (h\mathbf{V}) + \nabla \cdot (\frac{1}{2}gh^2) + \nabla \cdot (h\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) & = -gh\nabla b. \end{cases} \quad (3.14)$$

- $S_2(t)$  est l'opérateur associé à la partie restante des équations (dispersive),

$$\begin{cases} \partial_t h & = 0, \\ \partial_t (h\mathbf{V}) & = \mathcal{D}. \end{cases} \quad (3.15)$$

Dans la suite du chapitre, nous nous limitons à l'étude des vagues 1D.

La structure hyperbolique des équations de SV permet le calcul de  $S_1(t)$  par une approche de type volumes finis (§3.3.2). L'opérateur  $S_2(t)$ , quant à lui, est traité par une méthode de différences finies (§3.3.3). Il est important de noter que résoudre le système (3.15) revient à résoudre une seule équation scalaire,  $h$  restant constant à cause de la première équation du système.

Cette structure hybride volumes finis/différences finies implique de travailler à la fois sur les valeurs moyennées sur les cellules et sur les valeurs nodales. Nous utilisons les notations suivantes :

- Le domaine numérique  $\Omega$  est uniformément divisé en  $N$  cellules  $(C_i)_{1 \leq i \leq N}$ .
- Nous appelons  $\delta_x$  le pas en espace et  $\delta_t$  le pas en temps.

### 3 - Présentation du modèle

---

- $w_i^n$  est la valeur au  $i^{ieme}$  noeud  $x_i$  de  $w$  au temps  $t_n = n\delta_t$ .
- $\bar{w}_i^n$  est la valeur moyenne de  $w$  sur la  $i^{ieme}$  cellule  $C_i$  à l'instant  $t_n = n\delta_t$ .

Le choix d'une méthode hybride volumes finis/différences finies rend nécessaire le passage des inconnues moyennées sur les cellules ( $\bar{w}_i^n$ ) aux inconnues aux noeuds ( $w_i^n$ ) à chaque pas de temps. Nous avons donc besoin de formules de passage qui préservent l'ordre spatial global du schéma. Les formules choisies sont précises à l'ordre  $O(\delta_x^4)$ . Elles peuvent être trouvées dans *Bonneton et al. (2011d)*.

#### 3.3.2 Discrétisation spatiale de la partie hyperbolique $S_1(\cdot)$

Le système (3.14) est traité en utilisant les méthodes numériques développées par *Berthon and Marche (2008)* pour le code SV SURF-WB (voir aussi *Marche, 2005*). En une dimension, le système s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hU) = 0, \\ \partial_t(hU) + \partial_x(hU^2 + gh^2/2) = -gh\partial_x b, \end{cases} \quad (3.16)$$

c'est-à-dire, sous forme plus condensée :

$$\partial_t \mathbf{w} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{w}) = \mathbf{S}(\mathbf{w}, b), \quad (3.17)$$

avec

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} h \\ hU \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} hU \\ hU^2 + \frac{g}{2}h^2 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{S}(\mathbf{w}, b) = \begin{pmatrix} 0 \\ -ghb' \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

où  $\mathbf{w}$  est le vecteur d'état en variables conservatives et  $\mathbf{f}(\mathbf{w})$  est la fonction flux.

Un certain nombre de contraintes doivent être prises en compte lors du choix des schémas numériques pour le système (3.17). Les schémas doivent être capables de gérer les processus en zone de surf, et donc permettre le développement et la propagation de discontinuités en limitant les effets dus à la dispersion et la dissipation numérique. Ils doivent également être capables de gérer efficacement la ligne d'eau, i.e. l'apparition ou le recouvrement de zones sèches. Le modèle doit de plus pouvoir reproduire l'interaction complexe entre les vagues et les variations du fond, et préserver les états au repos en présence de bathymétries fortement variables, c'est-à-dire :

$$U = 0, \quad h + b = \text{cst.}$$

Afin de répondre à ces différents impératifs, nous utilisons l'extension "well-balanced" à faible dissipation du schéma volumes finis introduit dans *Berthon and Marche (2008)*.

##### 3.3.2.1 Formalisme Volumes Finis

Nous considérons dans un premier temps le système homogène de SV :

$$\partial_t \mathbf{w} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{w}) = 0. \quad (3.19)$$

Comme nous l'avons signalé auparavant, les équations hyperboliques admettent la formation de discontinuités. On peut s'attendre à ce que les méthodes de différences finies classiques deviennent problématiques lorsque l'on s'approche des discontinuités, où les dérivées ne sont plus définies. On va donc plutôt utiliser une méthode de Volumes Finis (VF), qui est basée sur la forme intégrale des équations (3.19) (ici entre deux points  $x_1$  et  $x_2$ ) :

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{w}(x, t) dx = \mathbf{f}(\mathbf{w}(x_1, t)) - \mathbf{f}(\mathbf{w}(x_2, t)).$$

Le domaine de calcul est divisé en cellules, et on approxime  $\bar{\mathbf{w}}_i^n$  par la valeur moyenne de  $\mathbf{w}$  sur chaque cellule  $C_i$  à l'instant  $t_n$ , i.e. son intégrale sur la cellule divisée par son volume :

$$\bar{\mathbf{w}}_i^n = \frac{1}{\delta_x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{w}(t_n, x) dx$$

où  $x_{i-1/2}$  et  $x_{i+1/2}$  sont les abscisses des interfaces de la cellule  $C_i$ .

La formulation intégrale de la loi de conservation donne sur une cellule et après intégration entre  $t_n$  et  $t_{n+1}$  :

$$\int_{C_i} \mathbf{w}(x, t_{n+1}) dx - \int_{C_i} \mathbf{w}(x, t_n) dx = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}(\mathbf{w}(x_{i-1/2})) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}(\mathbf{w}(x_{i+1/2})) dt$$

c'est-à-dire, en divisant par  $\delta_x$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta_x} \int_{C_i} \mathbf{w}(x, t_{n+1}) dx &= \frac{1}{\delta_x} \int_{C_i} \mathbf{w}(x, t_n) dx \\ &\quad - \frac{1}{\delta_x} \left( \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}(\mathbf{w}(x_{i+1/2})) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}(\mathbf{w}(x_{i-1/2})) dt \right), \end{aligned}$$

qui peut se réécrire :

$$\bar{\mathbf{w}}_i^{n+1} = \bar{\mathbf{w}}_i^n - \frac{\delta_t}{\delta_x} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n)$$

avec  $F_{i-1/2}^n \approx \frac{1}{\delta_t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}(\mathbf{w}(x_{i-1/2})) dt$ , approximation du flux en  $x = x_{i-1/2}$ .

Cette relation exprime comment la quantité  $\bar{\mathbf{w}}_i^n$  évolue à chaque pas de temps, en fonction des flux entrant et sortant de la cellule  $C_i$ . En général, on ne peut pas calculer directement ces intégrales temporelles de flux. On préfère déterminer de bonnes fonctions flux, i.e. des fonctions qui approchent correctement le flux réel à partir des moyennes sur les cellules, seules données disponibles. On cherche donc une fonction  $\tilde{\mathbf{f}}$  telle que :  $F_{i-1/2}^n = \tilde{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{w}}_{i-1}^n, \bar{\mathbf{w}}_i^n)$  et  $F_{i+1/2}^n = \tilde{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{w}}_i^n, \bar{\mathbf{w}}_{i+1}^n)$ . Le schéma VF final dépend donc principalement de la manière dont on définit  $\tilde{\mathbf{f}}$ . La méthode choisie pour calculer les flux est introduite dans la partie suivante.

### 3.3.2.2 Schéma Volumes Finis du premier ordre pour le système homogène

Le système homogène de Saint-Venant peut donc être écrit sous la forme semi-discrète suivante :

$$\frac{d}{dt} \bar{\mathbf{w}}_i(t) + \frac{1}{\delta_x} \left( \tilde{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{w}}_i, \bar{\mathbf{w}}_{i+1}) - \tilde{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{w}}_{i-1}, \bar{\mathbf{w}}_i) \right) = 0 \quad (3.20)$$

### 3 - Présentation du modèle

où  $\tilde{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{w}}_{i-1}, \bar{\mathbf{w}}_i)$  et  $\tilde{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{w}}_i, \bar{\mathbf{w}}_{i+1})$  représentent respectivement les flux numériques aux interfaces entre les cellules  $C_{i-1}$  et  $C_i$  et les cellules  $C_i$  et  $C_{i+1}$ .

Ceux-ci sont calculés en utilisant une approche de type VFRoe-relaxation (voir *Galouët et al., 2003; Berthon and Marche, 2008*). Nous présentons tout d'abord le principe de ces méthodes, dans le cas général. Elles seront ensuite appliquées aux équations de SV.

**Principe du schéma VFRoe-relaxation** Les flux aux interfaces sont calculés en appliquant la fonction flux physique  $\mathbf{f}$  aux variables calculées aux interfaces. Les variables aux interfaces sont estimées par les solutions du problème de Riemann linéarisé suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{w}_t(x, t) + \tilde{A}(\mathbf{w}_l, \mathbf{w}_r)\mathbf{w}_x = 0 \\ \mathbf{w}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{w}_l & \text{si } x < 0 \\ \mathbf{w}_r & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

où la matrice linéarisée est définie par

$$\tilde{A}(\mathbf{w}_l, \mathbf{w}_r) = \partial_{\mathbf{w}}\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{w}}),$$

avec  $\mathbf{w}_l$  et  $\mathbf{w}_r$  les valeurs de  $\mathbf{w}$  respectivement à gauche et à droite de l'interface et  $\tilde{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}_l + \mathbf{w}_r)/2$ . Le système linéarisé est ensuite résolu suivant les méthodes présentées dans l'annexe A. En appelant  $\mathbf{w}^{VFRoe}(x/t, \mathbf{w}_l, \mathbf{w}_r)$  la solution du problème linéarisé, on a alors :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{w}}_i, \bar{\mathbf{w}}_{i+1}) = \mathbf{f}(\mathbf{w}^{VFRoe}(0, \bar{\mathbf{w}}_{i-1}, \bar{\mathbf{w}}_i)) \\ \tilde{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{w}}_i, \bar{\mathbf{w}}_{i+1}) = \mathbf{f}(\mathbf{w}^{VFRoe}(0, \bar{\mathbf{w}}_i, \bar{\mathbf{w}}_{i+1})) \end{cases}$$

**Application aux équations de SV** Pour les équations de SV, un changement de variable  $\mathbf{u} = \mathcal{U}(\mathbf{w}) = {}^t(2c, U)$ , avec  $c = \sqrt{gh}$ , est d'abord appliqué. *Berthon and Marche* (2008) ont montré que sous certaines hypothèses le schéma résultant est robuste, c'est-à-dire qu'il préserve la positivité des hauteurs d'eau. La méthode introduite précédemment est donc appliquée au système (3.19) après avoir effectué le changement de variable  $\mathbf{u} = \mathcal{U}(\mathbf{w})$  :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + B(\tilde{\mathbf{u}})\mathbf{u}_x = 0, \\ \mathbf{u}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{u}_l = \mathcal{U}(\mathbf{w}_l) & \text{si } x < 0 \\ \mathbf{u}_r = \mathcal{U}(\mathbf{w}_r) & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (3.21)$$

où  $B(\tilde{\mathbf{u}}) = (\nabla_{\mathbf{u}}\mathcal{W}(\mathbf{u}))^{-1} A(\mathcal{W}(\mathbf{u})) (\nabla_{\mathbf{u}}\mathcal{W}(\mathbf{u}))$ , avec  $\mathbf{w} = \mathcal{W}(\mathbf{u})$  ( $\mathcal{W}$  est la transformation inverse à  $\mathcal{U}$ ), et  $\tilde{\mathbf{u}} = (\mathbf{u}_l + \mathbf{u}_r)/2$ . Le système devient avec  $\mathbf{u} = {}^t(2c, U)$  :

$$\begin{cases} \partial_t(2c) + U\partial_x(2c) + c\partial_x U = 0, \\ \partial_t U + c\partial_x(2c) + U\partial_x U = 0. \end{cases}$$

$B(\tilde{\mathbf{u}})$  s'écrit alors

$$B(\tilde{\mathbf{u}}) = \begin{pmatrix} \tilde{U} & \tilde{c} \\ \tilde{c} & \tilde{U} \end{pmatrix}.$$

La matrice jacobienne a les valeurs propres suivantes :  $\lambda^1 = \tilde{U} - \tilde{c}$  et  $\lambda^2 = \tilde{U} + \tilde{c}$ , et nous définissons la matrice  $R$  dont les colonnes correspondent aux vecteurs propres  $\mathbf{r}^1 = {}^t(-1, 1)$  et  $\mathbf{r}^2 = {}^t(1, 1)$ . En suivant les méthodes décrites dans l'Annexe A, la solution exacte du problème linéarisé est :

$$\mathbf{u}^{VFRoe}(x/t, \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_l) = \sum_{x/t > \lambda^p} v_r^p \mathbf{r}^p + \sum_{x/t < \lambda^p} v_l^p \mathbf{r}^p,$$

avec  $v_{r,l}^p$  la  $p^{ieme}$  composante du vecteur  $\mathbf{v}_{r,l}$  défini par

$$\mathbf{v}_{r,l} = R^{-1} \mathbf{u}_{r,l} = {}^t \left( -c_{r,l} + \frac{1}{2} U_{r,l}, c_{r,l} + \frac{1}{2} U_{r,l} \right).$$

A l'interface entre les cellules, nous avons donc

$$\mathbf{u}^{VFRoe}(0, \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_l) = \sum_{\lambda^p < 0} v_r^p \mathbf{r}^p + \sum_{\lambda^p > 0} v_l^p \mathbf{r}^p,$$

c'est-à-dire :

$$\mathbf{u}^{VFRoe}(0, \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_l) = \begin{cases} \mathbf{u}_l & \text{si } \lambda_1 > 0, \\ \mathbf{u}_r & \text{si } \lambda_2 < 0, \\ \mathbf{u}_{i+1/2} & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.22)$$

avec

$$\mathbf{u}_{i+1/2} = \begin{pmatrix} 2c_{i+1/2} \\ U_{i+1/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\tilde{c} - \frac{1}{2}(U_r - U_l) \\ \tilde{U} - (c_r - c_l) \end{pmatrix}.$$

Les flux aux interfaces introduits dans (3.20) sont finalement calculés de la façon suivante :

$$\tilde{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{w}}_i, \bar{\mathbf{w}}_{i+1}) = \mathbf{f}(\mathcal{W}(\mathbf{u}^{VFRoe}(0, \mathcal{U}(\bar{\mathbf{w}}_i), \mathcal{U}(\bar{\mathbf{w}}_{i+1}))), \quad (3.23)$$

$$\tilde{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{w}}_{i-1}, \bar{\mathbf{w}}_i) = \mathbf{f}(\mathcal{W}(\mathbf{u}^{VFRoe}(0, \mathcal{U}(\bar{\mathbf{w}}_{i-1}), \mathcal{U}(\bar{\mathbf{w}}_i))), \quad (3.24)$$

### 3.3.2.3 Extension d'ordre élevé

Afin de réduire la dissipation et la dispersion numérique dans la partie hyperbolique  $S_1(\cdot)$ , des reconstructions des variables aux interfaces des cellules doivent être considérées. Nous suivons ici l'approche classique de type MUSCL (*van Leer*, 1979), et considérons le schéma numérique modifié suivant :

$$\frac{d}{dt} \bar{\mathbf{w}}_i(t) + \frac{1}{\delta_x} \left( \tilde{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{w}}_{i,r}^n, \bar{\mathbf{w}}_{i+1,l}^n) - \tilde{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{w}}_{i-1,r}^n, \bar{\mathbf{w}}_{i,l}^n) \right) = 0, \quad (3.25)$$

où  $\bar{\mathbf{w}}_{i,l}^n$  et  $\bar{\mathbf{w}}_{i,r}^n$  sont des interpolations d'ordre élevé des valeurs moyennées  $\bar{\mathbf{w}}_i$  à gauche et à droite de la cellule. Le solveur de Riemann présenté précédemment n'est donc plus appliqué aux valeurs constantes sur les cellules  $C_i$  et  $C_{i+1}$  mais à des interpolations de ces valeurs de part et d'autre de l'interface.

### 3 - Présentation du modèle

La méthode de reconstruction à faible dissipation et faible dispersion présentée dans *Camarri et al.* (2004) est utilisée. Considérons la cellule  $C_i$  et la valeur constante correspondante  $\bar{h}_i^n$ . Les valeurs à gauche et à droite de la cellule  $\bar{h}_{i,l}^n$  et  $\bar{h}_{i,r}^n$  sont reconstruites linéairement selon la méthode suivante :

$$\bar{h}_{i,r}^n = \bar{h}_i^n + \frac{1}{2}\overline{\delta h}_{i,r}^n \quad \text{and} \quad \bar{h}_{i,l}^n = \bar{h}_i^n - \frac{1}{2}\overline{\delta h}_{i,l}^n. \quad (3.26)$$

Les gradients sont construits à partir des valeurs sur 5 cellules :

$$\begin{aligned} \overline{\delta h}_{i,r}^n &= (1-\nu)(\bar{h}_{i+1}^n - \bar{h}_i^n) + \nu(\bar{h}_i^n - \bar{h}_{i-1}^n) \\ &\quad + \xi^c(-\bar{h}_{i-1}^n + 3\bar{h}_i^n - 3\bar{h}_{i+1}^n + \bar{h}_{i+2}^n) \\ &\quad + \xi^d(-\bar{h}_{i-2}^n + 3\bar{h}_{i-1}^n - 3\bar{h}_i^n + \bar{h}_{i+1}^n), \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \overline{\delta h}_{i,l}^n &= (1-\nu)(\bar{h}_i^n - \bar{h}_{i-1}^n) + \nu(\bar{h}_{i+1}^n - \bar{h}_i^n) \\ &\quad + \xi^c(-\bar{h}_{i-2}^n + 3\bar{h}_{i-1}^n - 3\bar{h}_i^n + \bar{h}_{i+1}^n) \\ &\quad + \xi^d(-\bar{h}_{i-1}^n + 3\bar{h}_i^n - 3\bar{h}_{i+1}^n + \bar{h}_{i+2}^n), \end{aligned} \quad (3.28)$$

avec  $\nu$ ,  $\xi^c$  et  $\xi^d$  égaux respectivement à  $\frac{1}{3}$ ,  $-\frac{1}{10}$  et  $-\frac{1}{15}$ . Ces valeurs permettent de minimiser dissipation et dispersion numérique.  $U$  est reconstruit de la même façon.

Lorsque des ondes de chocs se forment, l'interpolation doit être associée à une procédure de limitation afin que le schéma reste non-oscillant et positif. Des limiteurs de pente sont introduits, et ont pour but de limiter les dérivées spatiales à des valeurs réalistes lorsque des fronts raides sont présents. Dans les parties régulières des vagues, les limiteurs n'agissent pas et les reconstructions d'ordres élevés présentées précédemment sont calculées. La méthode utilisée est une limitation à 3 entrées, spécifiquement construite pour générer un schéma positif d'ordre le plus élevé possible loin des extrema et des discontinuités. Le schéma (3.25) devient

$$\frac{d}{dt}\bar{\mathbf{w}}_i(t) + \frac{1}{\delta x} \left( \tilde{\mathbf{f}}(L\bar{\mathbf{w}}_{i,r}^n, L\bar{\mathbf{w}}_{i+1,l}^n) - \tilde{\mathbf{f}}(L\bar{\mathbf{w}}_{i-1,r}^n, L\bar{\mathbf{w}}_{i,l}^n) \right) = 0. \quad (3.29)$$

Considérons par exemple la hauteur d'eau  $h$ . Les grandeurs reconstruites à l'ordre élevée incluant la limitation sont définies par

$$L\bar{h}_{i,r}^n = \bar{h}_i^n + \frac{1}{2}L_{i,r}(\bar{h}^n) \quad \text{et} \quad L\bar{h}_{i,l}^n = \bar{h}_i^n - \frac{1}{2}L_{i,l}(\bar{h}^n). \quad (3.30)$$

Nous considérons le limiteur suivant :

$$L(u, v, w) = \begin{cases} 0 & \text{si } uv \leq 0, \\ \text{sign}(u) \min(2|u|, 2|v|, w) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.31)$$

$L_{i,r}(\bar{h}^n)$  et  $L_{i,l}(\bar{h}^n)$  sont alors définies par

$$L_{i,r}(\bar{h}^n) = L(\overline{\delta h}_i^{n,-}, \overline{\delta h}_i^{n,+}, \overline{\delta h}_{i,r}^n) \quad \text{and} \quad L_{i,l}(\bar{h}^n) = L(\overline{\delta h}_i^{n,+}, \overline{\delta h}_i^{n,-}, \overline{\delta h}_{i,l}^n),$$

où  $\overline{\delta h}_i^{n,+} = \bar{h}_{i+1}^n - \bar{h}_i^n$  et  $\overline{\delta h}_i^{n,-} = \bar{h}_i^n - \bar{h}_{i-1}^n$  sont les variations de pente à l'amont et l'aval, et  $\overline{\delta h}_{i,r}^n$  et  $\overline{\delta h}_{i,l}^n$  sont définis par (3.27) et (3.28).

La robustesse du schéma final est démontrée dans *Berthon and Marche* (2008).



### 3.3.2.4 Gestion du terme source de topographie

Le déferlement en zone de surf est principalement un déferlement dit bathymétrique. La manière dont on prend en compte le terme source décrivant les variations de la topographie est donc très importante. On distingue principalement deux approches.

La première approche est basée sur une méthode de splitting. A chaque pas de temps on sépare le traitement du système hyperbolique homogène de celui du terme "source" (voir par exemple *Brocchini et al.*, 2001; *Brocchini and Dodd*, 2008). L'avantage principal de cette méthode est que la discrétisation globale se fait alors en deux étapes, et donc plus facilement. Dans le cas 1D présenté précédemment (équations (3.17)) cela revient à résoudre à chaque pas de temps :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{w} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{w}) = 0 \\ \text{puis} \quad \partial_t \mathbf{w} = S(\mathbf{w}) \end{cases} \quad (3.32)$$

On résout la première équation avec comme conditions initiales celles du système (3.17), puis la solution sert de condition initiale à la seconde équation. Le problème principal de cette méthode est qu'elle peut aboutir à la création de vitesses non-physiques. On peut par exemple avoir des vitesses non-nulles alors que l'on est repos, si le terme source n'est pas nul. En fait, elle est peu efficace lorsque l'on se rapproche d'un état d'équilibre, et donc non adaptée à décrire les convergences asymptotiques, ou encore la réponse du système à de faibles perturbations de l'état d'équilibre. De plus, ce type de méthode introduit souvent des oscillations numériques (non-physiques) en présence de fortes variations de topographie.

La deuxième méthode, qui est celle qui a été choisie pour notre schéma, est basée sur un traitement global du système, dit traitement "well-balanced". Il permet de conserver l'équilibre entre les gradients de vitesse et le terme source, de manière à ce que, à l'état d'équilibre, on ait  $\partial_x \mathbf{f}(\mathbf{w}) = S(\mathbf{w})$ .

Le schéma (3.29) est associé à la méthode de *reconstruction hydrostatique* introduite par *Audusse et al.* (2004). Les reconstructions suivantes sont introduites :

$$b_i^* = \max(b_{i,r}, b_{i+1,l}), \quad (3.33)$$

$$h_{i,r}^* = \max(0, h_{i,r} + b_{i,r} - b_i^*), \quad (3.34)$$

$$h_{i+1,l}^* = \max(0, h_{i+1,l} + b_{i+1,l} - b_i^*). \quad (3.35)$$

Afin d'assurer à la fois l'aspect "well-balanced" et un ordre élevé, nous devons non seulement considérer les reconstructions d'ordre élevé des variables conservatives, comme nous l'avons fait en §3.3.2.3, mais aussi de l'élévation de la surface libre  $\zeta$ . Le schéma résultant est capable de préserver les états au repos et la positivité de la hauteur d'eau (voir *Berthon and Marche*, 2008).

### 3.3.3 Discrétisation spatiale de la partie dispersive $S_2(\cdot)$

Le système correspondant à  $S_2(\cdot)$  s'écrit en une dimension

$$\begin{cases} \partial_t h & = 0 \\ \partial_t(hU) - \frac{1}{\alpha}gh\partial_x\zeta + (1 + \alpha h\mathcal{T}\frac{1}{h})^{-1}[\frac{1}{\alpha}gh\partial_x\zeta + h\mathcal{Q}_1(U)] & = 0, \end{cases} \quad (3.36)$$

où les opérateurs  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{Q}_1$  donnés par les expressions

$$\mathcal{T}w = -\frac{h^2}{3}\partial_x^2w - h\partial_xh\partial_xw + (\partial_x\zeta\partial_xb + \frac{h}{2}\partial_x^2b)w, \quad (3.37)$$

et

$$\mathcal{Q}_1(U) = 2h\partial_x(h + \frac{b}{2})(\partial_xU)^2 + \frac{4}{3}h^2\partial_xU\partial_x^2U + h\partial_x^2bU\partial_xU + (\partial_x\zeta\partial_x^2b + \frac{h}{2}\partial_x^3b)U^2. \quad (3.38)$$

Le système (3.36) est résolu à chaque pas de temps par une méthode de différences finies classique. Les dérivées spatiales sont discrétisées à l'aide de formules d'ordre 4, présentées ici pour une variable  $w$  arbitraire :

$$\begin{aligned} (\delta_x w)_i &= \frac{1}{12\delta_x}(-w_{i+2} + 8w_{i+1} - 8w_{i-1} + w_{i-2}), \\ (\partial_x^2 w)_i &= \frac{1}{12\delta_x^2}(-w_{i+2} + 16w_{i+1} - 30w_i + 16w_{i-1} - w_{i-2}), \\ (\partial_x^3 w)_i &= \frac{1}{8\delta_x^3}(-w_{i+3} + 8w_{i+2} - 13w_{i+1} + 13w_{i-1} - 8w_{i-2} + w_{i-3}). \end{aligned}$$

Les conditions limites sont imposées suivant la méthode présentée en §3.3.5.

### 3.3.4 Discrétisation temporelle

La discrétisation temporelle des système (3.14) et (3.15) est réalisée à l'aide de méthodes explicites. Nous utilisons dans les deux cas une méthode classique Runge-Kutta d'ordre 4.

### 3.3.5 Conditions limites

**Condition limite de type périodique, Neumann homogène ou paroi** Les conditions limites de la partie hyperbolique sont traitées comme dans *Marche et al.* (2007). Nous introduisons des cellules "fantômes" à gauche et à droite du domaine de calcul, et les relations suivantes sont imposées sur les quantités moyennées sur les cellules :

- $\bar{w}_{-k+1} = \bar{w}_{N-k+1}$  et  $\bar{w}_{N+k} = \bar{w}_k$ ,  $k \geq 1$ , pour des conditions périodiques,
- $\bar{w}_{-k+1} = \bar{w}_k$  et  $\bar{w}_{N+k} = \bar{w}_{N-k+1}$ ,  $k \geq 1$ , pour les conditions de type Neumann homogène à gauche et droite du domaine,
- $\bar{w}_{-k+1} = -\bar{w}_k$  et  $\bar{w}_{N+k} = -\bar{w}_{N-k+1}$ ,  $k \geq 1$ , pour des conditions de type paroi à gauche et à droite du domaine.

Pour la partie dispersive  $S_2$ , les conditions limites sont simplement imposées en réfléchissant de la manière suivante les coefficients associés aux noeuds nécessaires pour le calcul des dérivées aux limites du domaine de calcul :

- $w_{-k} = w_{N-k}$  and  $w_{N+k-1} = w_{k-1}$ ,  $k \geq 1$ , pour les conditions périodiques,
- $w_{-k} = w_k$  and  $w_{N+k} = w_{N-k}$ ,  $k \geq 1$ , pour des conditions de type Neumann homogène,
- $w_{-k} = -w_k$  and  $w_{N+k} = -w_{N-k}$ ,  $k \geq 1$ , pour des conditions de type paroi.

Une condition réflexive, simulant la présence d'une paroi, peut être obtenue en imposant une condition de type Neumann homogène sur  $h$  et  $\bar{h}$  et une condition de type paroi sur  $hU$  and  $\bar{h}U$ .

**Condition limite génératrice** Une zone de génération/absorption peut être imposée en entrée du domaine. Elle permet de générer facilement des trains de vagues lorsque les profils spatio-temporels d'élévation de la surface libre et de vitesse du train d'onde incident sont connus sur la longueur  $l_{gen}$  de la zone de génération. On impose à chaque pas de temps dans la zone de génération (i.e. pour  $x \in [0, l_{gen}]$ ) :

$$h(x, t) = h_0 + F_{abs}(x)(h(x, t) - h_0) + (1 - F_{abs}(x))\zeta_{theo}(x, t)$$

où  $\zeta_{theo}(x, t)$  est le profil spatial que l'on veut imposer et  $F_{abs}(x)$  une fonction croissante nulle en  $x = 0$  et égale à 1 lorsque  $x = l_{gen}$  définie par

$$F_{abs}(x) = 1 - \frac{\exp\left(\left(1 - \frac{x}{l_{gen}}\right)^{nr}\right) - 1}{\exp(1) - 1}.$$

La même procédure est appliquée à la vitesse  $U$ .

Une condition limite génératrice basée sur la conservation des invariants de Riemann a également été implémentée dans les parties SV du code (méthodes développées pour le code SURF-WB, voir *Marche* (2005)). Elle permet de générer des vagues en entrée de domaine à partir d'une simple série temporelle d'élévation de la surface libre lorsqu'on considère des cas où les effets dispersifs peuvent être négligés (génération en zone de surf interne par exemple). Cette condition limite ne peut malheureusement pas être généralisée de manière directe au cas du modèle S-GN avec splitting. L'implémentation de conditions de type Dirichlet non-homogène dans la partie dispersive (en cours) devrait permettre de lever ces limitations.

**Ligne d'eau** La ligne d'eau est traitée simplement, sans aucune procédure de "tracking", grâce à l'utilisation d'un schéma conservatif et robuste, qui permet de distinguer les zones sèches des zones mouillées par calcul direct des propriétés de l'écoulement. L'utilisation d'un solveur de Riemann permet de suivre l'évolution de la limite sec/mouillé de

la même façon qu'il permet de suivre la propagation des discontinuités. Il ne reste alors qu'à définir numériquement ce qu'est une cellule sèche. Un seuil  $h_\varepsilon$  est défini, en dessous duquel les cellules sont considérées sèches. Afin d'assurer que les valeurs de  $U$  restent bornées lorsque  $h \rightarrow 0$ , une procédure simple est appliquée : lorsque la hauteur d'eau devient plus petite que  $h_\varepsilon$ , on impose  $U = 0$ . De plus, pour les cas tests faisant intervenir des mouvements de la ligne d'eau importants, nous supprimons les termes dispersifs à la ligne d'eau et dans les zones sèches.

## 3.4 Validations

Dans cette partie, nous présenterons uniquement deux exemples de validations de nos méthodes numériques. La première sera effectuée à l'aide de solutions analytiques, la seconde à partir de données de laboratoire. Pour des validations extensives du modèle, le lecteur est prié de se référer à *Bonneton et al. (2011d)*, *Chazel et al. (2010)* et *Bonneton et al. (2011b)*.

### 3.4.1 Propagation d'ondes cnoïdales sur fond plat

Afin d'évaluer l'efficacité de nos méthodes numériques dans des cas non-linéaires, nous étudions dans ce cas test la propagation d'une onde cnoïdale très non-linéaire solution des équations de S-GN sur fond plat (voir définition §2.2.2).

Nous considérons un domaine périodique de longueur égale à une longueur d'onde de l'onde cnoïdale considérée. A  $t = 0$  s, nous imposons une onde cnoïdale de hauteur normalisée  $H/h_0 = 0.6$  et de période  $T = 4$  s (voir aussi Figure 3.1). Nous comparons ensuite les solutions analytique et numérique après propagation pendant 15 périodes, c'est-à-dire à  $t = 60$  s, et cela pour différentes discrétisations spatiales. La Figure 3.1 représente les solutions numériques à  $t = 0$  (onde cnoïdale théorique) et après 60 secondes de propagation pour un pas d'espace  $\delta_x = 0.01$  m. Les deux courbes sont indifférenciables à l'oeil nu. Ce résultat témoigne des très bonnes qualités numériques de notre modèle.

L'erreur relative sur l'élévation de la surface libre  $E_\zeta$  est ensuite calculée pour les différentes discrétisations en utilisant la norme discrète  $L^\infty$  :

$$E_\zeta = \frac{\| h_{num} - h_{sol} \|_\infty}{\| h_{sol} - h_0 \|_\infty}$$

avec  $h_{num}$  la solution numérique, et  $h_{sol}$  la solution analytique. La courbe de convergence est représentée Figure 3.2, et montre que l'on a une précision de 2.61 en espace pour ce cas très fortement non-linéaire.

### 3.4.2 Transformations d'ondes solitaires en zone de levée

Dans ce cas test, nous analysons les performances du modèle en zone de levée pour différents degrés de non-linéarité de l'onde incidente. Nous utilisons des expériences en

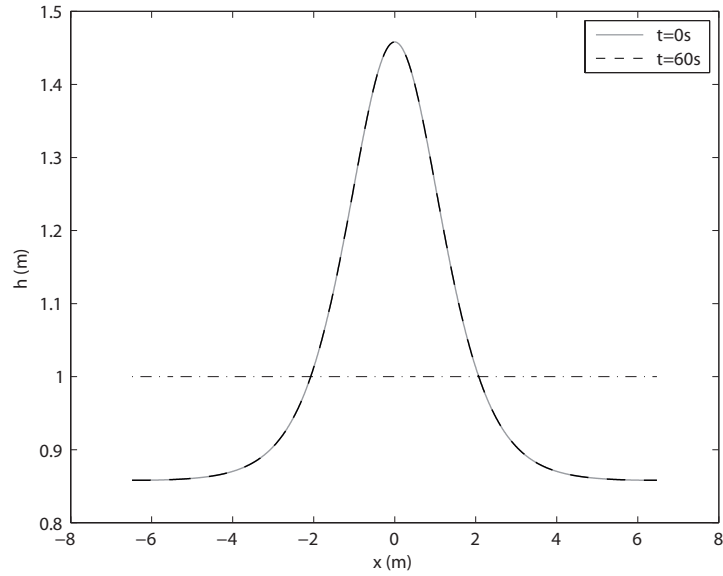


FIGURE 3.1 – Propagation d’une onde cnéidale fortement non-linéaire sur fond plat ( $H = 0.6$  m,  $h_0 = 1$  m,  $T = 4$  s) dans un domaine périodique. (—) : onde cnéidale à  $t=0$  (solution exacte); (- - -) : profil calculé par le modèle à  $t = 15T = 60$  s; (- · -) : niveau d’eau au repos.  $\delta_x = 0.01$  m et  $\delta_t = 0.0032$  s.

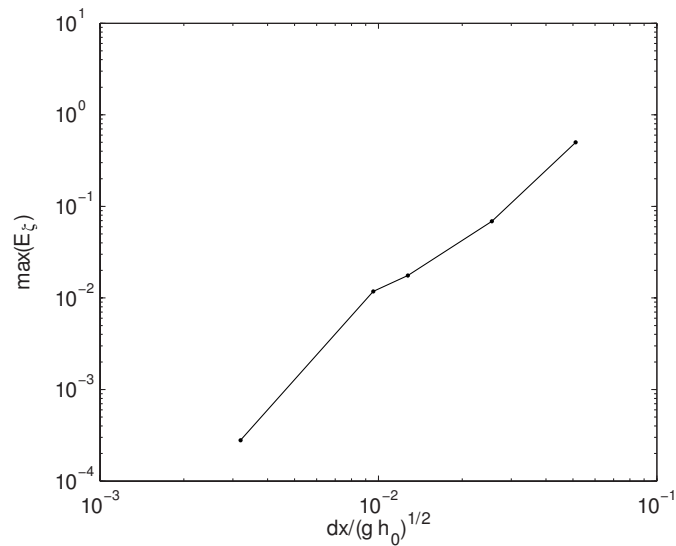


FIGURE 3.2 – Erreurs de discrétisation pour la solution numérique d’une onde cnéidale fortement non-linéaire ( $H = 0.6$  m,  $h_0 = 1$  m,  $T = 4$  s). Erreur de convergence en fonction de  $\delta_x/(gh_0)^{1/2}$  à  $t = 15T$  (pas de temps fixe :  $\delta_t = 0.0032$  s).

### 3 - Présentation du modèle

Amplitude de la vague incidente : $a_0/h_0 = 0.096$					
Positions sondes (m) (par rapport à la ligne d'eau)	2.430	2.215	1.960	1.740	1.502
Erreur relative en ampl. (%)	-1.6	-2.5	-5.5	-7.1	-10.9
Amplitude de la vague incidente : $a_0/h_0 = 0.298$					
Positions sondes (m) (par rapport à la ligne d'eau)	3.980	3.765	3.510	3.290	3.052
Erreur relative en ampl. (%)	1.2	-0.5	0.2	-0.2	0.04
Amplitude de la vague incidente : $a_0/h_0 = 0.456$					
Positions sondes (m) (relative to the shoreline)	4.910	4.695	4.440	4.220	3.982
Erreur relative en ampl. (%)	3.6	-0.3	1.1	0.5	2.2
Amplitude de la vague incidente : $a_0/h_0 = 0.534$					
Positions sondes (m) (par rapport à la ligne d'eau)	5.180	4.965	4.710	4.490	4.252
Erreur relative en ampl. (%)	0.03	-0.1	-1.4	-1.7	0.7

TABLE 3.1 – Ondes solitaires se propageant sur une plage de pente 1 :30 - Localisation des sondes et erreur relative entre les amplitudes calculées par le modèle et les amplitudes mesurées au niveau de chaque sonde.

laboratoire réalisées au LEGI, Grenoble (*Guibourg*, 1994). Des vagues solitaires sont générées dans un canal de 36 m de long suivant la procédure décrite dans *Guizien and Barthélemy* (2002), et se propagent ensuite sur une plage de pente 1 :30.

Les déplacements de la surface libre sont mesurés à plusieurs positions juste avant le point de déferlement. Des ondes solitaires de quatre hauteurs différentes sont générées et permettent de tester les performances du modèle pour différents degrés de non-linéarité. Les hauteurs des vagues incidentes sont décrites dans le tableau 3.1.

Pour les quatre simulations, nous considérons un pas d'espace  $\delta_x = 0.025 m$  et un pas de temps  $\delta_t = 0.016 s$ . La hauteur d'eau initiale dans la partie horizontale du canal est  $h_0 = 0.25 m$ .

Les séries temporelles numériques et expérimentales sont comparées Figure 3.3, tandis que les pourcentages d'erreurs relatifs en amplitude sont présentés dans le tableau 3.1. Nous obtenons de très bons résultats de manière générale, même pour les plus fortes valeurs de non-linéarités, à la fois en terme d'amplitude et de forme de l'onde solitaire. Les erreurs les plus importantes sont observées pour  $a_0/h_0 = 0.096$ , c'est-à-dire dans le cas où les non-linéarités sont les plus faibles. Des résultats similaires avaient été obtenus par *Cienfuegos et al.* (2007) avec leur modèle S-GN SERR-1D, et peuvent peut-être être en partie expliqués par des problèmes expérimentaux (plan d'eau non au repos avant l'arrivée de l'onde solitaire dans ce cas).

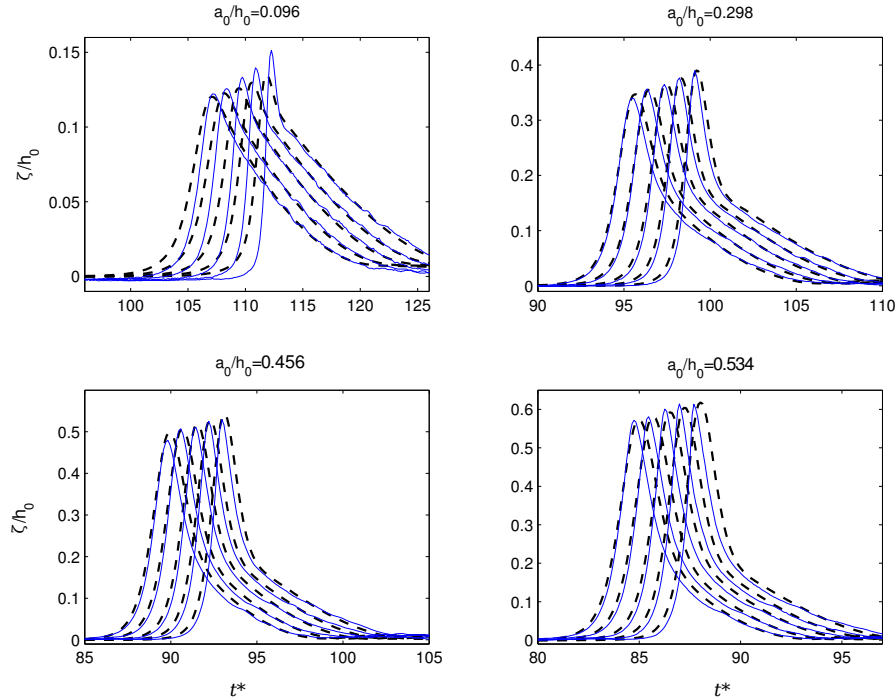


FIGURE 3.3 – Ondes solitaires se propageant sur une plage de pente 1 :30 - Séries temporelles d’élévation de la surface libre : (—) données expérimentales, (- - -) Résultats numériques.  $t^* = t(g/h_0)^{1/2}$ .

### 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté notre modèle numérique, basé sur les équations de S-GN. Les équations sont tout d’abord reformulées sous une forme plus adaptée à la résolution numérique. Elles sont ensuite résolues en utilisant une méthode de splitting, permettant l’utilisation de schémas hybrides volumes finis/différences finies. La partie hyperbolique des équations, correspondant aux équations de SV sous forme conservative, est traitée à l’aide de schémas volumes finis à capture de chocs d’ordre élevé permettant la propagation des vagues déferlées sous la forme de discontinuités ainsi que la gestion des zones sèches. La partie dispersive est traitée à l’aide d’une approche différence finie classique. Les validations décrites dans ce chapitre ainsi que celles présentées dans *Bonneton et al. (2011d)* et *Chazel et al. (2010)* ont ensuite permis de démontrer l’efficacité de nos méthodes numériques dans le cas de vagues non-déferlées. Le chapitre 4 présentera en détail notre méthode de gestion du déferlement.





# Chapitre 4

## Prise en compte du déferlement

### 4.1 Introduction

Le traitement séparé de la partie hyperbolique des équations et des termes dispersifs par la méthode de splitting permet un couplage naturel des équations de SV et des équations de S-GN. En effet, il suffit de désactiver l'étape dispersive ( $S_2$ ) pour revenir à un modèle numérique basé sur les équations de SV uniquement, capable de gérer naturellement la propagation et dissipation des vagues déferlées et les mouvements complexes de la ligne d'eau. Nous présentons dans ce chapitre notre méthode de gestion du déferlement, basée sur des changements locaux et dynamiques entre les deux systèmes d'équations au niveau des fronts de vague.

Notre méthodologie sera tout d'abord exposée en détail dans la partie 4.2, constituée d'un article soumis à *Coastal Engineering*. Ce papier présente tout d'abord une méthode simple pour localiser et caractériser les fronts de vague à chaque pas de temps, basée sur l'étude de la dissipation d'énergie correspondant aux étapes SV (cf. partie 2.3.1.2). L'algorithme permettant de décider quel système d'équations, S-GN ou SV, va gouverner la propagation d'un front donné à un instant donné est ensuite décrit. De nombreuses validations de notre modèle de déferlement seront présentées, et permettront de tester à la fois l'initiation et l'arrêt du déferlement à partir de données de laboratoire. Dans la partie 4.3, nous appliquerons le nouveau modèle à l'étude des transformations des ondes infragravitaires en zone de surf. Ce cas test nous permettra également de tester la capacité de notre modèle à gérer des trains de vagues non réguliers, et donc différents points de déferlement. Enfin, nous concluons ce chapitre dans la partie 4.4.

## 4.2 Article soumis à *Coastal Engineering*

### A new approach to handle wave breaking in fully non-linear Boussinesq models

M. Tissier<sup>1</sup>, P. Bonneton<sup>1</sup>, F. Marche<sup>2</sup>, and F. Chazel<sup>3</sup>, D. Lannes<sup>4</sup>

#### Abstract

In this paper, a new method to handle wave breaking in fully non-linear Boussinesq-type models is presented. The strategy developed to treat wave breaking is based on a reformulation of the set of governing equations (namely Serre Green-Naghdi equations) that allows us to split them into an hyperbolic part in the conservative form and a dispersive part. When a wave is ready to break, we switch locally from Serre-Green-Naghdi equations to Non-linear Shallow Water equations by suppressing the dispersive terms in the vicinity of the wave front. Thus, the breaking wave front is handled as a shock by the Non-linear Shallow Water equations, and its energy dissipation is implicitly evaluated from the mathematical shock-wave theory. A simple methodology to characterize the wave fronts at each time step is first described, as well as appropriate criteria for the initiation and termination of breaking. Extensive validations using laboratory data are then presented, demonstrating the efficiency of our simple treatment for wave breaking.

---

1. Université Bordeaux 1 ; CNRS ; UMR 5805-EPOC, Talence, F-33405, France.  
2. I3M, Université de Montpellier 2, CC 051, F-34000, Montpellier, France  
3. Université de Toulouse, UPS/INSA, IMT, CNRS UMR 5219, F-31077 Toulouse, France  
4. DMA, Ecole Normale Supérieure et CNRS UMR 8553, 45 rue d'Ulm, F-75005, Paris

### 4.2.1 Introduction

Non-linear wave transformations in shallow water, and associated processes such as wave-breaking and run-up, play a key role in the nearshore dynamics. A detailed knowledge of instantaneous non-linear wave characteristics is required in place of wave-averaged quantities for an accurate prediction of suspended sediment transport. *Elgar et al.* (2001) highlighted the importance of wave asymmetry for onshore bar migration, while recent studies focused on the influence of different combinations of wave skewness and asymmetry on the net sediment flux (*Ruessink et al.*, 2009; *Grasso et al.*, 2011). Non-linear effects are also responsible for the generation of infra-gravity waves, which can strongly affect beach and dune erosion during high energy events (*Roelvink et al.*, 2009). An accurate description of non-linear wave transformations is also necessary for the study of coastal flooding due to storm waves or tsunamis. The description of these highly non-linear and unsteady processes requires phase-resolving models with a good description of breaking and run-up over complex bathymetries. The most accurate models for the description of wave breaking are based on the Navier-Stokes equations. They can give a detailed description of wave breaking, including wave overturning, but are highly computationally demanding and therefore not suitable for large scale propagation applications. For this reason, phase-resolving models based on depth-averaged equations are still an attractive way to describe wave transformation in the nearshore zone. Two kinds of approaches can be considered : the models can be based on Non-linear Shallow Water (NSW) or Boussinesq-Type (BT) equations.

NSW models, with the help of shock-capturing schemes, can accurately reproduce broken wave dissipation and swash oscillations without any ad hoc parametrization (*Kobayashi et al.*, 1989; *Bonneton*, 2007; *Marche et al.*, 2007; *Brocchini and Dodd*, 2008). The absence of dispersive effects restricts their validity domain to areas where non-linearities predominate, such as the inner surf and swash zones. They are in particular not valid in the shoaling zone, since the absence of dispersive effects would lead to an incorrect prediction of the location of wave breaking. On the other hand, BT equations take into account at different degrees of accuracy both non-linear and dispersive aspects of wave propagation. Denoting by  $a$  the order of free surface amplitude,  $h_0$  the characteristic water depth and  $L$  the characteristic horizontal scale, most of Boussinesq models used for nearshore applications are based on a classical shallow water assumption  $\mu = (h_0/L)^2 \ll 1$  and balance between dispersion and non-linearity  $\epsilon = O(\mu) \ll 1$ , with  $\epsilon = a/h_0$ . Yet, these assumptions do not always hold in the nearshore, in particular in the final stages of shoaling and in the surf and swash zones, where  $\epsilon$  can be of order 1. For such applications, fully non-linear BT equations are required. *Wei et al.* (1995) showed that accounting for strong non-linearities in BT approaches leads to significantly improved predictions of wave heights, wave celerities and internal kinematics prior to breaking.

The first set of fully non-linear BT equations was derived by *Serre* (1953), and extended to the 2D case by *Green and Naghdi* (1976). These equations, called Serre Green-Naghdi (S-GN) equations thereafter, are now recognized to be the relevant system to describe fully non-linear weakly dispersive waves propagating in the nearshore (*Lannes and Bonneton*, 2009). They can accurately predict most phenomena exhibited by non-breaking waves in finite depth. However, as they do not include intrinsically energy dissipation due to wave breaking, they become invalid in the surf zone. Besides, S-GN dispersive terms become nonphysical in the vicinity of the breaking wave fronts, since they have been derived under the long wave assumption. Several attempts have been made to introduce wave breaking in BT models by the mean of *ad hoc* techniques (e.g., *Madsen et al.*, 1997; *Kennedy et al.*, 2000; *Cienfuegos et al.*, 2010). These approaches generally require (1) the inclusion of an energy dissipation mechanism through the activation of extra terms in the governing equations when wave breaking is likely to occur; (2) explicit criteria to activate/desactivate these extra terms; (3) a method to follow the waves during their propagation since the breaking parametrizations depend on the age of the breaker. Moreover, the breaking model parameters need to be calibrated to ensure that the artificially induced energy dissipation is in agreement with the rate of energy dissipated in surf zone waves. FUNWAVE (*Kirby et al.*, 1998) is a well-known example of this kind of models. It is based on the fully non linear Boussinesq equations of *Wei et al.* (1995), with additional parametrizations to include wave breaking and run-up (*Kennedy et al.*, 2000). Except for being formulated in terms of the velocity vector at an arbitrary  $z$  level, the equations of *Wei et al.* are basically equivalent to the S-GN equations. FUNWAVE gives a very good description of wave transformations in the nearshore, but each use of the model implies the tuning of several parameters, as the ones determining wave breaking dissipation and run-up (*Bruno et al.*, 2009). Recently, *Cienfuegos et al.* (2010) showed that *Kennedy et al.*'s eddy viscosity breaking model could hardly predict simultaneously accurate wave height and asymmetry along the surf zone. This observation motivated the development of a new 1D wave-breaking parametrization including viscous-like effects on both the mass and the momentum equations. This approach is able to reproduce wave height decay and intraphase non-linear properties within the entire surf zone (*Cienfuegos et al.*, 2010). However, the extension of this parametrization to 2D wave cases remains a very difficult task. Therefore, alternative approaches to handle wave breaking in BT models may prove very useful.

Recently, the so-called non-hydrostatic models, governed by the NSW equations including non-hydrostatic pressure, have been introduced as an alternative to BT models<sup>1</sup>.

---

1. However, the model derived in *Zijlema et al.* (2011) in its one-layer formulation (Eqs 18-21) can be rewritten in a quasi BT form :

$$\begin{aligned} \partial_t \zeta + \partial_x(hu) &= 0 \\ \partial_t u + u \partial_x u + g \partial_x \zeta &= \frac{1}{4h} [\partial_x(h^3 \partial_{xt} u) - \partial_x(h^2 \partial_x(hu) \partial_x u)], \end{aligned}$$

They can be run in multi-layered mode, improving their frequency dispersion properties, but also include a special treatment for wave breaking (classical Prandtl mixing length parametrization) as they do not explicitly account for small-scale turbulent processes.

The fully non-linear numerical model presented in this study is based on S-GN equations. It is worthwhile to note that S-GN equations degenerate naturally into NSW equations when dispersive effects are negligible. These equations are therefore well-suited to describe wave propagation until the swash zone. In order to treat wave breaking, a hybrid approach has been developed. S-GN equations are reformulated in a way that allows us to split them into an hyperbolic part corresponding to the NSW equations in the conservative form and a dispersive part (see *Bonneton et al., 2011d*). The idea is to switch from S-GN to NSW equations when the wave is ready to break by suppressing locally the dispersive term. This method allows for a natural treatment of wave breaking, since the energy dissipation due to wave breaking is predicted implicitly by the shock theory, and does not require to be parametrized. It is an important point since the amount of energy dissipated will determine crucial phenomena such as the water level set-up (*Bonneton, 2007*), and will impact wave-driven circulation (*Bühler, 2000; Smith, 2006; Bonneton et al., 2010*). From a numerical point of view, an operator-splitting approach with hybrid finite volume/finite difference schemes has been implemented (*Bonneton et al., 2011d*), allowing for the most effective schemes to be used for each part of the equations. Some hybrid numerical methods have already been developed recently but only within the framework of weakly non-linear BT equations (*Soares-Frazão and Zech, 2002; Erduran et al., 2005; Erduran, 2007; Briganti et al., 2004; Weston et al., 2003; Soares-Frazão and Guinot, 2008; Shiach and Mingham, 2009; Tonelli and Petti, 2009, 2010; Orszaghova et al., 2010*). In addition, only a few studies among them take advantage of the shock-capturing properties of the Finite-Volume schemes to treat wave breaking (*Weston et al., 2003; Tonelli and Petti, 2009, 2010; Orszaghova et al., 2010*). A natural approach to handle wave breaking with this kind of models is to estimate the breaking point location and subsequently divide the numerical domain into two spatial zones, pre- and post- breaking, respectively governed by BT and NSW equations (e.g. *Weston et al., 2003; Tonelli and Petti, 2009, 2010*). This simple decomposition is of great interest for engineering purposes, in particular for the study of submersion risks, traditionally based on NSW models. Indeed, it allows for an accurate and simple description of both non-breaking and breaking wave transformations, and a treatment of shoreline motions without any parametrization. However, these models cannot be applied to the description of irregular wave trains, since it implies different breaking point locations and therefore series of alternatively breaking and non-breaking waves. A first step toward a

---

where several nonlinear terms present in the S-GN equations have been neglected; moreover, the linear wave celerity associated to these equations is given by  $c^2 = gd(1 - (kd)^2/4)$  which differs at order  $O((kd)^2)$  from the exact linear wave celerity while standard Boussinesq models are precise up to  $O((kd)^4)$  terms.

wave-by-wave treatment of breaking in hybrid models was performed by *Orszaghova et al.* (2010) and *Tissier et al.* (2010). Of note, *Orszaghova et al.*'s weakly dispersive BT model do not encompass any treatment for the termination of breaking : it cannot be applied to bar-trough shaped beaches for instance.

In this paper, a new methodology to handle wave breaking in hybrid models is presented. This method is based on switches performed locally in space and time from S-GN to NSW equations in the vicinity of the wave fronts. With this local treatment, we aim at obtaining a model able to account simultaneously and accurately for the effects of dispersion, non-linearities and wave breaking for a given wave. This is of importance when considering for instance tsunami wave front transformations in the nearshore, which can evolve into a large range of bore types, including purely undular, purely breaking or partially breaking undular bores. The model should also be able to predict irregular waves transformations, as well as their transformations over complex bathymetries, including barred beaches. The numerical model is briefly described in Section 4.2.2. The strategy developed to handle wave breaking is then presented in Section 4.2.3. Extensive validations using experimental data are then performed (Section 4.2.4), including periodic wave transformations over a planar beach, solitary wave breaking, run-up and overtopping, and wave breaking over a bar. At last, some preliminary tests concerning hydraulic bore dynamics are performed, showing promising results concerning the model ability to predict the complex transition from undular to breaking bore.

### 4.2.2 Description of the model

Our model is based on a new 2D conservative S-GN formulation. These equations and the numerical methods to solve them are described in *Bonneton et al.* (2011d). In this section we sum up the main characteristics of our S-GN model in 1D.

#### 4.2.2.1 Governing equations

The model is based on the S-GN equations. These equations can be formulated in term of the conservative variables  $(h, hu)$  in the following dimensionalized form :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) = -gh\partial_x b + \mathcal{D}, \end{cases} \quad (4.1)$$

with  $u$  the depth averaged horizontal velocity,  $\zeta$  the surface elevation,  $h$  the water depth and  $b$  the variation of the bottom topography.  $\mathcal{D}$  characterizes non-hydrostatic and dispersive effects and writes :

$$\mathcal{D} = \frac{1}{\alpha}gh\partial_x\zeta - (1 + \alpha h\mathcal{T}\frac{1}{h})^{-1}[\frac{1}{\alpha}gh\partial_x\zeta + h\mathcal{Q}_1(u)], \quad (4.2)$$

where the linear operator  $\mathcal{T}$  is defined as

$$\mathcal{T}w = -\frac{h^2}{3}\partial_x^2w - h\partial_xh\partial_xw + (\partial_x\zeta\partial_xb + \frac{h}{2}\partial_x^2b)w, \quad (4.3)$$

and :

$$\mathcal{Q}_1(u) = 2h\partial_x\left(h + \frac{b}{2}\right)(\partial_x u)^2 + \frac{4}{3}h^2\partial_x u\partial_x^2 u + h\partial_x^2 b u\partial_x u + \left(\partial_x \zeta\partial_x^2 b + \frac{h}{2}\partial_x^3 b\right)u^2. \quad (4.4)$$

$\alpha$  is an optimization parameter that should be taken equal to 1.159 in order to minimize the phase and group velocity errors in comparison with the linear Stokes theory (see the dispersion correction method discussed in *Cienfuegos et al. (2006)*). Note that the range of validity of this set of equations can be extended to deeper water, using some additional optimization parameters, as described in *Chazel et al. (2010)*.

The proposed formulation has two important advantages. First of all, the dispersive term does not require the direct computation of any third order derivative, allowing for more robust numerical computations. Moreover, if  $\mathcal{D} = 0$ , we obtain the NSW equations in their conservative form. The formulation is therefore well-suited for a splitting approach separating the hyperbolic and the dispersive part of the equations, allowing for an easy coupling of the sets of equations.

#### 4.2.2.2 Numerical methods

At each time step  $\delta_t$ , we decompose the solution operator  $S(\cdot)$  associated to (4.1) by the second order splitting scheme

$$S(\delta_t) = S_1(\delta_t/2)S_2(\delta_t)S_1(\delta_t/2), \quad (4.5)$$

where  $S_1$  and  $S_2$  are respectively associated to the hyperbolic and dispersive parts of the S-GN equations (4.1). More precisely :

- $S_1(t)$  is the solution operator associated to NSW equations

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) & = 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) & = -gh\partial_x b. \end{cases} \quad (4.6)$$

- $S_2(t)$  is the solution operator associated to the remaining (dispersive) part of the equations,

$$\begin{cases} \partial_t h & = 0, \\ \partial_t(hu) & = \mathcal{D}. \end{cases} \quad (4.7)$$

**Hyperbolic part** Our S-GN model has been developed as an extension of the widely validated NSW code SURF-WB (see *Marche et al., 2007; Berthon and Marche, 2008*). The system (4.6) can be regarded as an hyperbolic system of conservation laws with a topography source term. To perform numerical approximations of the weak solutions of this system, we use a high order finite-volume method in conservative variables, based on a positive preserving relaxation scheme and MUSCL reconstructions (see *Berthon and Marche (2008)*). Since we aim at computing the complex interactions between propagating waves and topography, including the preservation of motionless steady states, a

well-balanced scheme is used for the discretization of the topography source term (see *Audusse et al.*, 2004). Gathering these approaches, we obtain a high-order positive preserving well-balanced shock-capturing scheme, able to handle breaking bores propagation as well as moving shorelines without any tracking method (*Marche et al.*, 2007).

**Dispersive terms** The system (4.7) is solved at each time step using a classic fourth-order finite-difference approach. It is worth mentioning that we only need to solve one *scalar* equation (rather than a set of two equations) during this dispersive step. Indeed,  $h$  remains constant owing to the first equation of (4.7).

Concerning the time discretization, explicit methods are used both in  $(S_1)$  and  $(S_2)$ . The systems are integrated in time using a classical fourth-order Runge-Kutta method.

**Treatment of the shoreline** No special tracking procedure is used to handle shoreline motions. Dry cells are defined as those in which the water depth is less than a threshold value  $h_\epsilon$ . A small routine is applied to ensure the stability of the numerical results at the shoreline : when the water depth  $h$  is smaller than  $h_\epsilon$ , we impose  $v = 0$  ( $h_\epsilon = 10^{-5}$  in Section 4.2.4). The dispersive terms are suppressed when the water depth vanishes.

Extensive validations of the numerical methods for the 1D problem can be found in *Bonneton et al.* (2011d,b) and *Chazel et al.* (2010).

### 4.2.3 Wave breaking

Prior to breaking, S-GN equations give a very accurate description of wave transformations, including internal kinematics (*Carter and Cienfuegos*, 2011). However, depth-averaged approaches cannot reproduce wave overturning and small-scale processes related to wave breaking. By switching locally to NSW equations, we decide to represent breaking wave fronts as shocks : we conserve mass and momentum across the wave front, and allow energy to dissipate, according to the shock theory. The switch from the S-GN to the NSW equations is performed locally in time and space, by skipping the dispersive step  $S_2(\delta_t)$  when the wave is ready to break. As we aim at applying our code to realistic incoming waves, implying different locations of the breaking point, we need to handle each wave individually. We present in this section a simple way to characterize the wave fronts at each time step, as well as adequate criteria for the initiation and termination of breaking.

#### 4.2.3.1 Characterization of the wave fronts

The switches from one set of equations to another are performed in the vicinity of the wave fronts, defined as the parts of the waves lying between the crest and the trough



in their direction of propagation. We therefore first need to locate the wave fronts of interest, that is to say the breaking or broken fronts as well as those likely to break, and then decide which set of governing equations should be applied in their vicinities.

A simple way to identify these wave fronts at each time step is to detect the shocks forming during the NSW steps through the study of the energy dissipation. Indeed, the energy dissipation forms peaks at the steepest parts of the wave fronts when shocks are forming. This method can also be applied to the detection of the wave fronts likely to break since shocks are already forming during the NSW steps at the last stages of shoaling. However, as long as the dispersive terms are activated, the dispersive step ( $S_2$ ) counteracts the shock development occurring during the NSW steps ( $S_1$ ), preventing wave breaking.

From a practical point of view, we compute at each time step the local energy dissipation  $D(x, t)$  corresponding to the first NSW step :

$$D(x, t) = -(\partial_t \mathcal{E} + \partial_x \mathcal{F}), \quad (4.8)$$

with  $\mathcal{E} = \frac{\rho}{2}(hu^2 + g\zeta^2)$  the energy density and  $\mathcal{F} = \rho hu(\frac{u^2}{2} + g\zeta)$  the energy flux density. We then detect the local maxima of the dissipation, and consider that the wave fronts are centred on these peaks.

In order to distinguish broken wave fronts from others, we quantify the amount of energy dissipated at the wave front during the first NSW step ( $S_1$ ).  $D(x, t)$  is integrated over the front and normalized by the theoretical dissipation across a shock, defined as follows (*Stocker, 1957*) :

$$D_b = \frac{\rho g}{4} \left( \frac{g(h_2 + h_1)}{2h_1 h_2} \right)^{1/2} (h_2 - h_1)^3, \quad (4.9)$$

with  $h_1$  and  $h_2$  the water depth in front and behind the shock (see Figure 4.1).  $h_1$  and  $h_2$  are respectively approximated by the water depth at the trough and the crest of the wave, defined as the closest surface elevation extrema to the dissipation peak. The normalized dissipation  $\Gamma = \int_{front} D(x, t) dx / D_b$  is close to one for fully broken waves, close to zero when the wave is not breaking. Intermediate values can be found at the initiation and termination of breaking, i.e. when the breaker is not saturated ( $(h_2 - h_1) < H$ , with  $H$  the wave height).

Thus, the study of  $\Gamma$  allows for a simple estimation of the wave "state" at each time step, without requiring any wave tracking technique. We consider that for  $\Gamma \geq 0.5$ , the wave is broken, and for  $\Gamma < 0.5$ , the wave is either non-breaking or at the very first stages of breaking. Additional criteria are needed to determine when to initiate/terminate wave breaking.

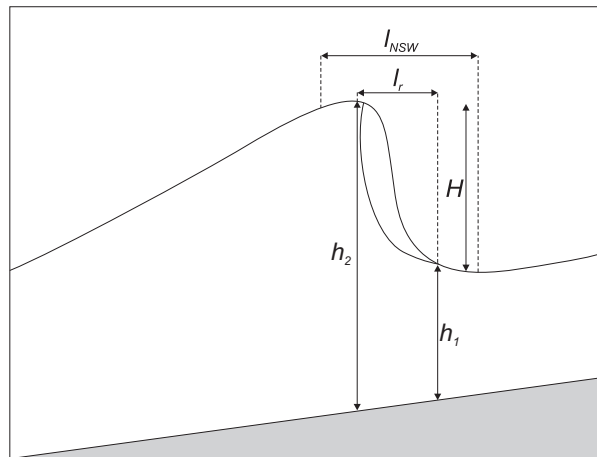


FIGURE 4.1 – Definition sketch for a broken wave propagating over a sloping beach.  $l_r$  : roller length.  $l_{NSW} = 2.5l_r$  : width of the spatial zone where the switch from S-GN to NSW equations is performed.

#### 4.2.3.2 Breaking criteria

Several criteria for the initiation of breaking can be found in the literature (e.g., Schäffer *et al.*, 1993; Zelt, 1991; Kennedy *et al.*, 2000; Okamoto and Basco, 2006; Bjørkavåg and Kalisch, 2011). For the test cases presented in Section 4.2.4, a criterion based on the critical front slope (Schäffer *et al.*, 1993) has been implemented. We define  $\Phi$  the maximal local front slope and  $\Phi_i$  the critical slope. For  $\Phi \geq \Phi_i$  the breaking process starts. Numerical tests showed that  $\Phi_i = 28^\circ$  was the optimal value for our test-cases. This value is very close to the optimal angle determined by Cienfuegos *et al.* (2010) for their S-GN model.

After breaking, the wave fronts are handled as shocks by the NSW equations. As long as they are governed by these equations, the shocks keep dissipating energy. A physical criterion is needed to determine when the switch back to S-GN equations has to be performed, allowing for the breaking process to stop. The proposed criterion is based on the analogy between a broken wave and a bore in the sense of a simple transition between two uniform levels (Peregrine, 1983). Bores stop breaking when their Froude number  $Fr_1 = (c_b - u_1)/(gh_1)^{1/2}$ , with  $c_b$  the bore celerity and  $u_1$  the depth-averaged velocity in front of the bore, drops below a critical value  $Fr_c$ . Our criterion for the cessation of breaking is therefore the following : the wave stops breaking if  $Fr_1 < Fr_c$ , with  $Fr_1$  rewritten as a function of  $h_1$  and  $h_2$  only using the mass and momentum conservation across the bore :

$$Fr_1 = \sqrt{\frac{(2h_2/h_1 + 1)^2 - 1}{8}}. \quad (4.10)$$

Experimental studies found that the Froude number at the cessation of breaking for a bore propagating on a flat rectangular channel was ranging from 1.2 to 1.3 (Favre, 1935; Treske, 1994; Chanson, 2008). In the following test cases, we set  $Fr_c = 1.3$ .

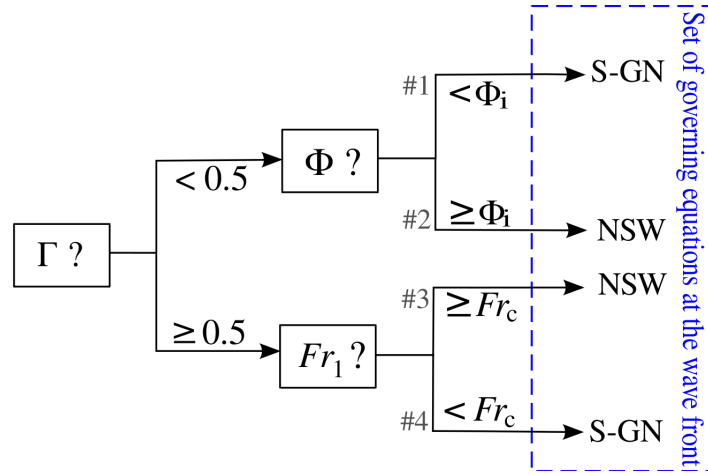


FIGURE 4.2 – Wave breaking model

#### 4.2.3.3 Suppression of the dispersive term

The zone over which we switch to NSW equations for a given wave is centred on the wave front, as illustrated in Figure 4.1. Its horizontal length  $l_{NSW}$  must be larger than the order of magnitude of the physical length of the roller  $l_r$  ( $l_{NSW} = a l_r$ ,  $a > 1$ ) in order to avoid the nonphysical effects of the dispersive terms in the vicinity of the breaking wave front. *Haller and Catalán* (2010) found experimentally that  $l_r \approx 2.9H$  was a good estimation of the roller length for well-established breakers in agreement with previous experiments by *Duncan* (1981). Numerical tests showed that  $a \approx 2.5$  was an appropriate value. Of note, the length  $l_{NSW}$  does not determine the amount of energy dissipated at the breaking wave front nor its spatial distribution. For this reason, model predictions appear to be weakly dependant from its value, as long as  $l_{NSW} > l_r$ .

The methodology to handle wave breaking is summarized in Figure 4.2. At each time step, the wave fronts are first located and their normalized dissipation computed following the method detailed in §4.2.3.1. Four cases are then possible :

- If  $\Gamma < 0.5$  and  $\Phi < \Phi_i$  : the wave is not breaking. The flow is governed by the S-GN equations (see Figure 4.2, case 1).
- If  $\Gamma < 0.5$  and  $\Phi \geq \Phi_i$  : the wave is at the first stages of breaking. The front is governed by NSW equations allowing the shocks to develop (case 2).
- If  $\Gamma \geq 0.5$  and  $Fr_1 \geq Fr_c$  : the wave is broken. The wave front is locally governed by the NSW equations (case 3).
- If  $\Gamma \geq 0.5$  and  $Fr_1 < Fr_c$  : the wave stops breaking. The wave front is governed by the S-GN equations (case 4).

Figure 4.3 illustrates our wave-by-wave treatment of breaking using a simulation corresponding to *Cox* (1995) regular wave experiments. In the shoaling zone, the wave fronts are characterized by a normalized dissipation  $\Gamma$  close to zero. As they propagate shoreward, the waves gradually steepen. When their front slope reaches the critical value  $\Phi_i$ ,

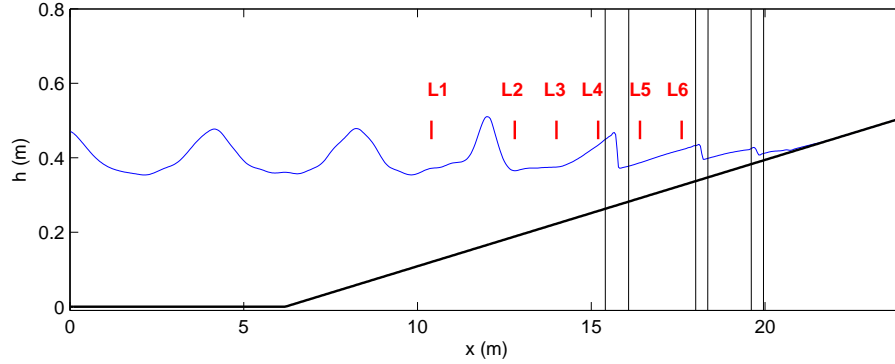


FIGURE 4.3 – Spatial snapshot of cnoidal waves propagating over a 1 :35 sloping beach (Cox, 1995). L1 to L6 : locations of the wave gauges. Between 2 consecutive vertical lines, the flow is governed by NSW equations.

the switch to NSW equations is performed. The waves enter a transitional zone, where the fronts are steepening further while shocks are developing (case 2). After a while, the waves are fully broken, and their normalized dissipation is close to one (case 3). They dissipate their energy while propagating shoreward, leading to a progressive decrease of the breaker heights and front slopes. The waves will keep breaking as long as their Froude number is such as  $Fr_1 \geq Fr_c$ , i.e. until the shoreline in this case (see vertical lines in Figure 4.3). If the broken waves were propagating over a trough (see §4.2.4.4 for instance), the bore Froude number would decrease and eventually get smaller than  $Fr_c$ . The switch back to S-GN equations would then be performed (case 4), resulting in the gradual disappearance of the shocks and the decrease of the normalized dissipation  $\Gamma$ .

The transition between the two systems is performed abruptly, without any smooth transition zone. In this way, wave propagation is governed by one given set of equations in each cell, and not by a non-physical mix of both sets. The transition generates some disturbances, but they remain of small amplitude and do not lead to instabilities. No numerical filtering is applied. It is worth noting that the generation of oscillations is also observed for Boussinesq models based on the surface roller method when the extra-terms responsible for wave breaking are activated.

The proposed breaking-model has several advantages. First, the energy dissipation due to wave breaking is implicitly predicted by the shock theory and does not require to be parametrized contrary to most of the BT models. Moreover, the characterization of the waves at each time step is performed in a simple way through the study of the energy dissipation. The only important parameters to prescribe are the criteria for the initiation and termination of breaking. It is worth noting that the test-cases presented in Section 4.2.4 were all simulated with the same set of parameters ( $\Phi_i = 28^\circ$ ,  $Fr_c = 1.3$ ).

#### 4.2.4 Validations

In order to validate our model, classical test cases are first used. They involve the transformations of regular wave trains (§4.2.4.1) and solitary waves (§4.2.4.2) over sloping beaches. These commonly-used benchmarks allow for a rigorous testing of our breaking model. More challenging test-cases are then considered. The ability of our model to describe wave breaking and swash motions over complex bathymetries, involving the water mass separation into disjoint water bodies is first studied (§4.2.4.3). We then investigate the model ability to predict wave transformations over a bar (§4.2.4.4). In this test case, a special focus is placed on the prediction of the termination of breaking and subsequent wave transformations after the bar. Bore dynamics for different Froude numbers is then studied (§4.2.4.5). These preliminary tests aim at investigating the model ability to account simultaneously for the effects of dispersion, non-linearities and wave breaking for a given wave.

##### 4.2.4.1 Shoaling and breaking of regular waves over a sloping beach

***Cox (1995)*'s experiment** In our first test case we consider *Cox (1995)*'s regular waves experiment. Cnoidal waves of relative amplitude  $H/h_0 = 0.29$  and period  $T = 2.2$  s were generated in the horizontal part of a wave flume of depth  $h_0 = 0.4$  m. They were then propagating and breaking over a 1 :35 sloping beach. For this test case, synchronized time-series of free surface elevation are available at six locations, corresponding to wave gages located outside (L1 and L2) and inside (L3 to L6) the surf zone (see Figure 4.3). During the experiment, waves were breaking slightly shoreward to L2.

For this simulation, we choose  $\delta_x = 0.04$  m,  $\delta_t = 0.01$  s. Figure 4.3 shows a spatial snapshot of the free-surface profile computed with the model. Figure 4.4 compares the experimental and numerical time-series for this experiment. It is worth noting that the time-series are in phase, demonstrating that wave celerity is accurately predicted by the model. We have a very good overall agreement concerning the shape of the waves, both in the shoaling and surf zone. In particular, the model is able to reproduce the typical saw-tooth profile in the Inner Surf Zone (ISZ).

***Ting and Kirby (1994)*'s experiment** In this section the numerical model is applied to reproduce the laboratory experiments performed by *Ting and Kirby (1994)*. Cnoidal waves were generated in the horizontal part of a flume ( $h_0 = 0.4$  m) and were propagating over a 1 :35 sloping beach. The wave period was  $T = 2.0$  s and the incident wave height  $H = 0.125$  m. For this experiment, non-synchronized time-series of surface elevations and mean characteristic levels (crest, trough and mean water levels) are available at 21 locations in the shoaling and surf zones. For the simulation, the grid size of the mesh is  $\delta_x = 0.05$  m and the time step is  $\delta_t = 0.02$  s. Figure 4.5 shows the spatial variations of the crest and trough elevations, as well as the variation of the mean water level for

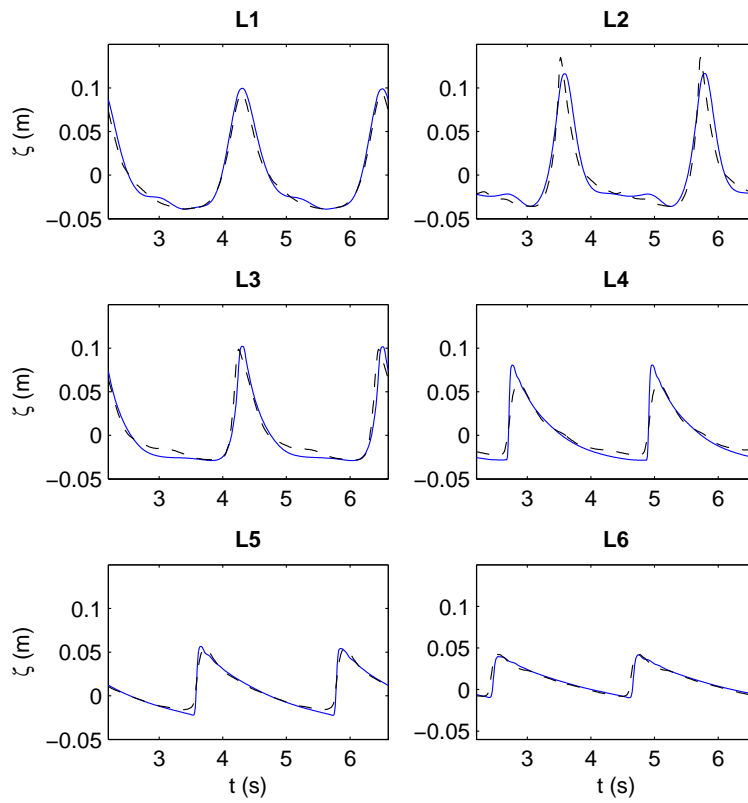


FIGURE 4.4 – Comparisons of computed (plain lines) and experimental (dashed lines) synchronized time-series of free-surface elevation at the wave gauges for Cox breaking experiment (1995).

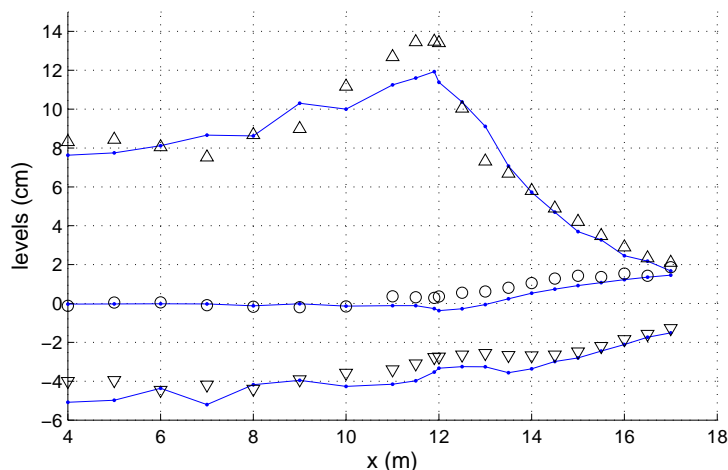


FIGURE 4.5 – Comparisons of computed (plain lines) and experimental data (symbols) for *Ting and Kirby* (1994) experiment. ( $\circ$ ) : Mean Water Level; ( $\nabla$ ) : trough elevation relative to MWL; ( $\triangle$ ) : crest elevation relative to MWL.

experimental and numerical data. The agreement between data and model is relatively good concerning the prediction of wave set-up. As wave set-up and broken wave energy dissipation are closely related (*Bonneton, 2007*), this result demonstrates that the model gives a realistic description of the energy dissipation. Figure 4.6 compares the time-series of free surface elevations at different locations. We can see that the wave asymmetry is accurately reproduced, even in the last stages of shoaling and in the ISZ. The main discrepancies are found in the vicinity of the breaking point, where the wave height is underestimated, but the overall agreement improves significantly while propagating shoreward. In particular, the wave height decay in the ISZ is well reproduced.

#### 4.2.4.2 Solitary wave transformation over a sloping beach (*Synolakis, 1987*)

In this test case, we assess the ability of our model to describe wave breaking and shoreline motions. It is based on laboratory experiments carried out by *Synolakis* (1987) for an incident solitary wave of relative amplitude  $a_0/h_0 = 0.28$  ( $h_0 = 0.3$  m) propagating and breaking over a planar beach with a slope 1 :19.85. For this experiment, spatial snapshots at different times are available. The simulations are performed using the grid size  $\delta_x = 0.025$  m, and  $\delta_t = 0.008$  s.

The comparisons between measured and computed waves are presented in Figure 4.7. We can see that the overall agreement is very good during shoaling, breaking, run-up and run-down. Moreover the model is able to describe the formation and breaking of a backwash bore, which is a particularly demanding test for most of Boussinesq-type models since it involves a broken bore propagating backward.

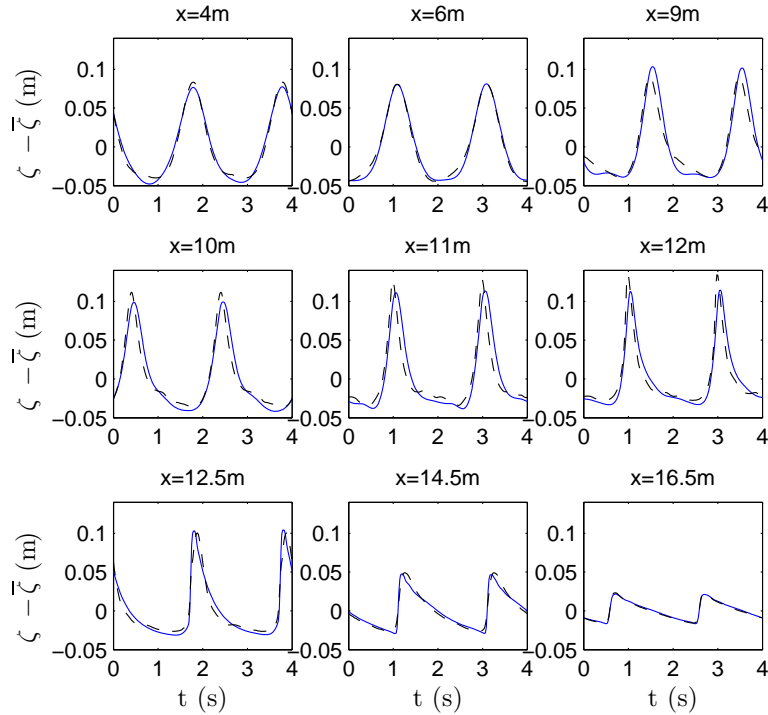


FIGURE 4.6 – Comparisons of computed (plain lines) and measured (dashed lines) time-series of free surface elevations for *Ting and Kirby* experiment at different locations.

#### 4.2.4.3 Solitary waves overtopping a seawall (*Hsiao and Lin, 2010*)

We investigate here the ability of our model to describe the complex transformations of solitary waves overtopping a seawall. We consider experiments carried out by *Hsiao and Lin* (2010) in a 22 m long wave flume located in the Tainan Hydraulic Laboratory, National Cheug Kung University, Taiwan. During this experiment, three types of solitary waves were generated. Their characteristics are described in Table 4.1 (see the top part of Figure 4.8 for a visualisation of the water depth at rest for the 3 cases). In the first case, the solitary wave was breaking on the sloping beach before reaching the wall. In the second case, the solitary wave was breaking on the seawall whereas for case 3 the wave was overtopping directly the seawall without any prior breaking and subsequently collapsing behind the seawall. *Hsiao and Lin* compared the experimental data with predictions with the volume of fluid (VOF) type model COBRAS (*Lin and Liu, 1998*), based on Reynolds-Averaged Navier-Stokes equations with  $k - \epsilon$  turbulent closing solver. They found a very good agreement between experimental data and model predictions, for all stages of wave transformations. This test case will allow us to evaluate the degree of accuracy reachable using a depth-averaged model only.

For our simulations, we choose  $\delta_t = 0.007$  s and  $\delta_x = 0.02$  m, and we suppress systematically the dispersive terms shoreward to the seawall. Bottom friction effects are



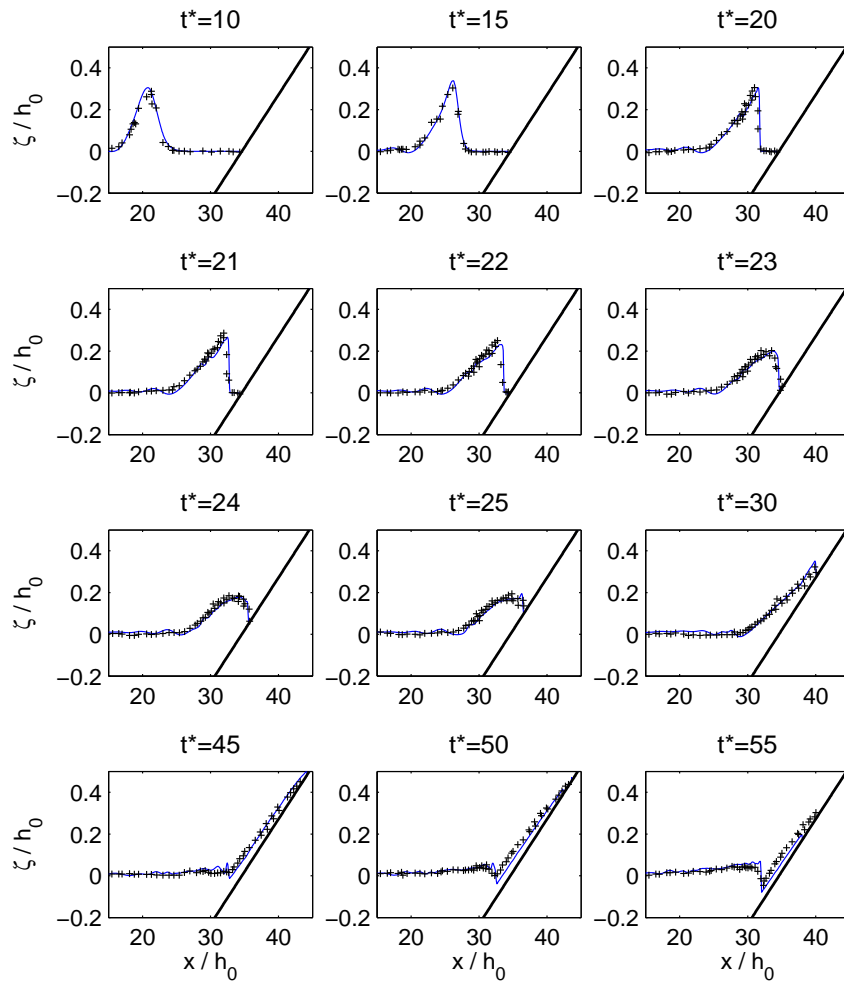


FIGURE 4.7 – Comparisons of model predictions (lines) and experimental snapshots (+) at different times for a breaking solitary wave with non-dimensional initial incident amplitude  $a_0/h_0 = 0.28$ , on a 1 :20 plane beach (*Synolakis, 1987*).  $t^* = t(g/h_0)^{1/2}$ .

	$h_0$ (m)	$H/h_0$
Type 1	0.20	0.35
Type 2	0.22	0.29
Type 3	0.256	0.23

TABLE 4.1 – Wave heights and non-linear parameters ( $H/h_0$ ) for the 3 experiments carried out by *Hsiao and Lin* (2010).

expected to be important when the water becomes very shallow, i.e. during the run-up and run-down stages : a quadratic friction term is introduced for this simulation (friction coefficient  $f = 0.01$ ).

Comparisons between the measured and numerical time-series of free-surface elevations at the wave gauges are presented in Figure 4.8 for the three types of solitary waves. A very good agreement is obtained for the wave gauges located seaward from the wall (see Fig. 4.8, wave gauges (WG) 1-22) for all the cases. The run-up over the sloping part of the seawall is also well reproduced (WG28). A part of the wave is reflected over the wall, resulting in the development of an undulated bore propagating seaward for the types 1 and 2. This phenomenon is well-described by the model, which highlights its good dispersive properties. The model predictions are a bit less accurate at the wave gauges located just behind the wall. Indeed, if the arrival time of the overtopping wave front is well predicted by the model, its height is generally underpredicted (see WG37-40, for  $2 < t < 5$  s). Discrepancies are more important for Type 3. This can be explained by the highly turbulent behaviour of the wave collapsing behind the wall, which cannot be reproduced by our model. A better agreement is observed at the WG46, located further away from the wall. Discrepancies between numerical and experimental data become then more significant for  $t > 5$  s (WG37-46). It corresponds to the run-down of the overtopped water, followed by a new run-up phase after reflection on the seawall.

On the whole, our model gives similar results to those predicted by the more advanced COBRAS model presented in *Hsiao and Lin* (2010) in terms of time-evolution of the free surface during the first stages of wave overtopping (shoreward propagation). Discrepancies between numerical and experimental data increase during the run-down/run-up phases : these parts of wave evolution are significantly better predicted by the COBRAS model. However, it is important to note that the predicted water depths behind the wall tend to be similar to the experimental ones at the end of the measurements, suggesting a good prediction of the amount of overtopped water.

### 4.2.4.4 Periodic waves breaking over a bar (*Beji and Battjes, 1993*)

Wave transformations over a bar involve a number of complex processes such as non-linear shoaling, amplification of bound harmonics, and eventually initiation and termination of breaking, with the release of the higher harmonics. A good prediction of

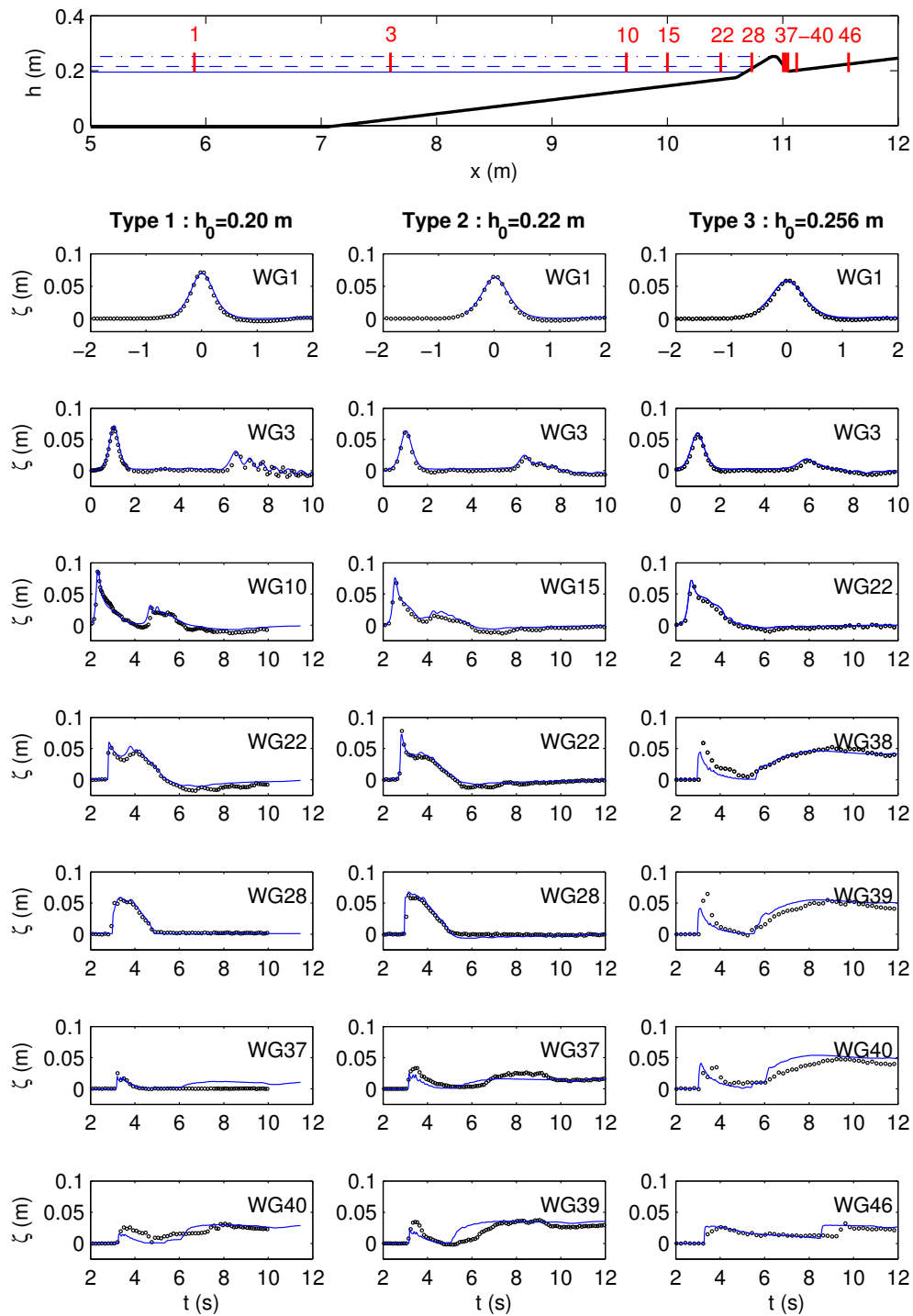


FIGURE 4.8 – Top panel : locations of the wave gauges (WG) ; Bottom panel : Comparison between experimental ( $\circ$ ) and numerical (plain lines) time-series of free-surface elevation for the 3 types of solitary waves described in Table 4.1 (*Hsiao and Lin, 2010*).

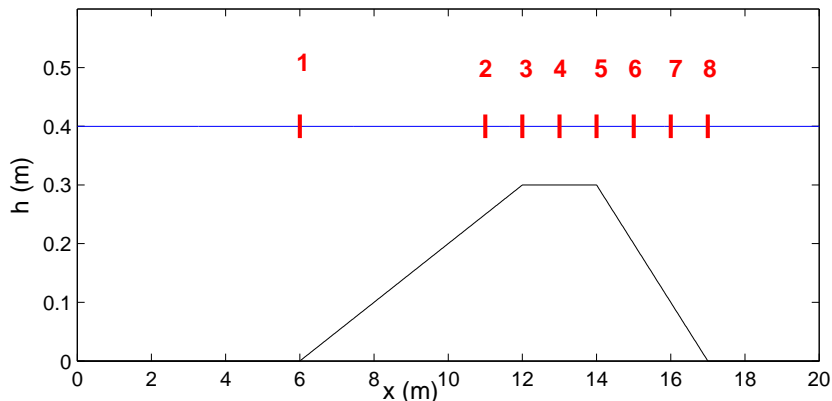


FIGURE 4.9 – Schematic view of the experimental setup in *Beji and Battjes* (1993). Vertical lines : location of the wave gauges (WG).

these transformations is therefore a challenging test-case for the numerical models. In *Chazel et al.* (2010), our model was successfully applied to the description of non-breaking wave propagation over a submerged bar. In the present test case, wave breaking occurs on the top of the bar. We aim at investigating the ability of our model to predict wave breaking initiation, termination and subsequent transformations after passing the bar.

*Beji and Battjes* (1993) conducted a series of flume experiments concerning the propagation of regular waves (1 Hz and 0.4 Hz) over a submerged trapezoidal bar, corresponding to either non-breaking, spilling breaking or plunging breaking waves. The bathymetry is presented in Figure 4.9 : the water depth varies from  $h_0 = 0.4$  m in the deeper region to 0.1 m over the top of the bar. In this section, we focus on the long wave plunging case ( $f = 0.4$  Hz) as described in *Beji and Battjes* (1993). Eight wave gauges were deployed, numbered from 1 to 8 in Figure 4.9. Experimental and predicted surface elevation time-series are compared in Figure 4.10. The wave asymmetry is very well-reproduced during the shoaling phase (see Wave Gauge 2) until the onset of breaking (WG3). A good agreement is then observed during breaking on the top of the bar (WG4-5), in particular in term of wave height decay. After the bar, the breaking stops and the wave decomposes itself into several smaller amplitude waves, which are in phase with the experimental data and of similar wave length (WG6-8). If a slight underestimation of the amplitude is observed at this stage, we still have an overall good agreement, indicating that our criteria for the termination of breaking seems adequate, and that the switch from NSW to S-GN equations after the bar gives a good description of the physical processes.

### 4.2.4.5 Transition from undular to purely breaking bore

In shallow-water regions, dispersive effects can become significant and affect tsunami wave transformations. Depending on the complex balance between non-linear effects,

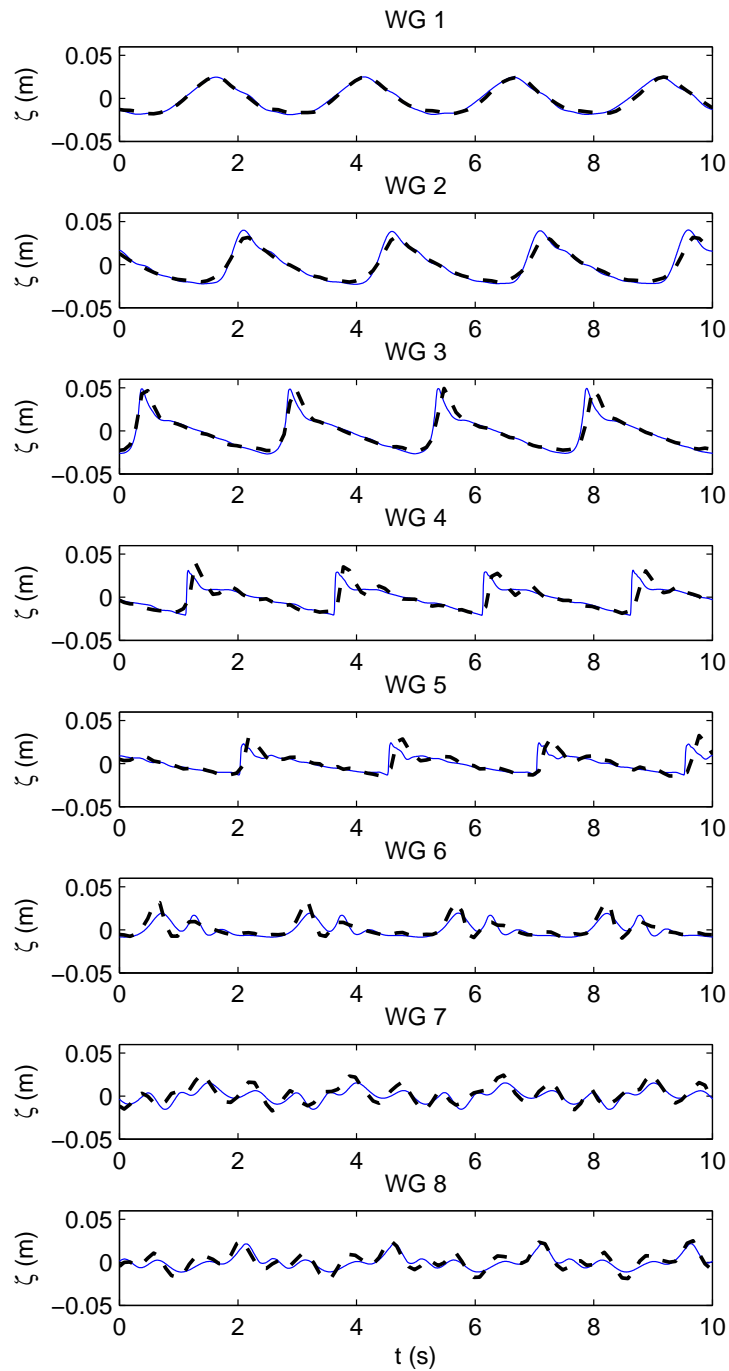


FIGURE 4.10 – Comparisons of predicted (plain lines) and measured free-surface elevation time-series (dashed lines) at different locations for periodic waves propagating over a bar (Beji and Battjes, 1993 : long waves, plunging case).

dispersive effects and energy dissipation due to wave breaking, tsunami wave fronts can evolve into a large range of bore types, from purely undular to purely breaking bore (Grue *et al.*, 2008; Yasuda, 2010). A good prediction of tsunami wave front transformations in shallow-water is therefore needed for a better understanding of tsunami run-up and impact on coastal structures. However, previous numerical studies concerning bore dynamics using depth-averaged approaches have been devoted to either purely broken bores using NSW models (e.g., Brocchini and Dodd, 2008), or undular bores using BT models (Wei *et al.*, 1995; Soares-Frazão and Zech, 2002). A model able to reproduce the different bore shapes, as well as the transition from one type of bore to another is required.

Experimentally, it has been showed that the Froude number  $Fr_1$  controls the bore shape as well as the transition from one kind of bore to another (see Section 4.2.3.2). Two main transitions are observed at  $Fr_1 = Fr_a$  and  $Fr_b$  ( $Fr_a < Fr_b$ ). Non-breaking undular bores are observed for  $Fr_1 < Fr_a$  (e.g.,  $Fr_a = 1.3$  in Chanson (2008)). For  $Fr_a < Fr_1 < Fr_b$  an undular bore is still developing but the front wave is broken, whereas for  $Fr_1 > Fr_b$ , a purely breaking bore is observed ( $Fr_b = 1.45 - 1.5$  in Chanson (2008)).

In this test case, we assess the ability of our numerical model to reproduce bore dynamics for a large range of Froude numbers. At  $t = 0$ , we consider initial steps over a flat bottom defined by

$$\begin{cases} h(x, 0) = \frac{1}{2}(h_2 - h_1)(1 - \tan(x/a)) + h_1 \\ u(x, 0) = \frac{1}{2}(u_2 - u_1)(1 - \tan(x/a)) + u_1, \end{cases}$$

corresponding to Froude numbers varying from 1.10 to 1.90.  $h_1$  and  $h_2$  are the water depth in front and behind the bore,  $u_1$  and  $u_2$  are the corresponding depth-averaged velocities. We set  $u_1 = 0$  (water initially at rest),  $h_1 = 1$  m and  $a = 2$  m. For each Froude number  $h_2$  and  $u_2$  are deduced from the mass and momentum conservation across the bore. Figure 4.11 shows the bore shapes at  $t = 30$  s for the different Froude numbers. For  $Fr_1 < 1.40$ , the initial step evolves into an undular jump (see experimental validation in Tissier *et al.* (2011) for the undular case). It can be observed that, in agreement with experimental studies, the secondary wave wavelength decreases with increasing Froude number, while the amplitude increases. For  $Fr_1 = 1.40$ , a wave train is formed but the first wave is broken. Although the first wave seems too damped in comparison with the experimental results, the overall shape at the transition is well-reproduced (see the bore pictures from Treske (1994) for  $Fr_1 = 1.35$ ). It is also in agreement with experiments by Chanson (2008), who observed a flattening of the free-surface elevation for intermediate Froude numbers. For higher Froude numbers, we obtain a strongly breaking bore. It can be observed that some disturbances occur behind the breaking fronts. Their physical relevance still needs to be explored. We observe that our S-GN model is able to reproduce accurately the main features of different bore types, which is a challenging test case for

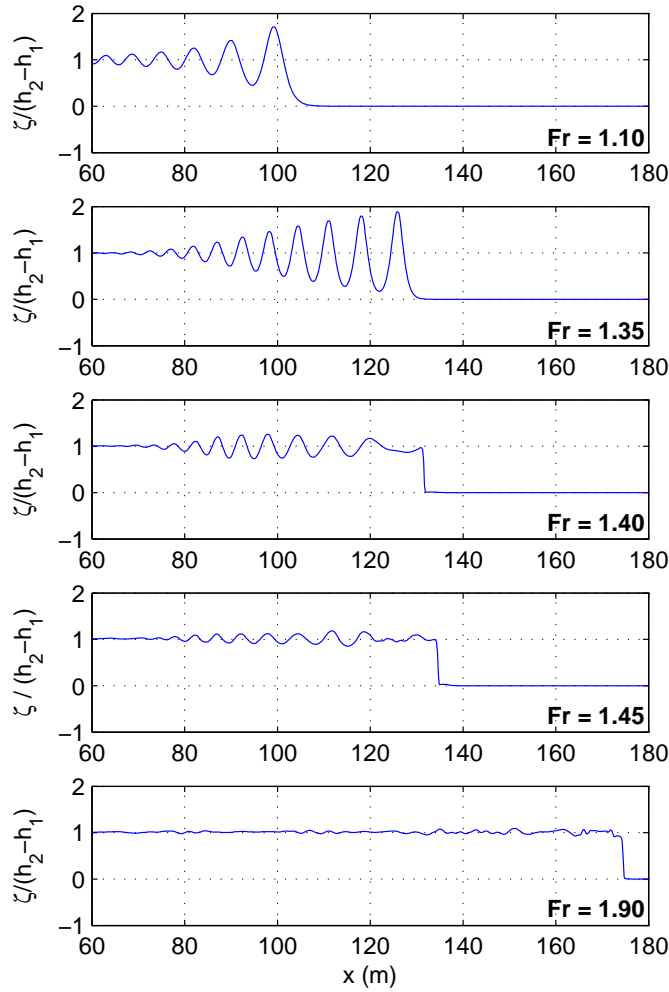


FIGURE 4.11 – Normalized free surface profiles at  $t = 30$  s of hydraulic bores with Froude numbers varying from 1.10 to 1.90.

the numerical models. Moreover, the Froude number for the transitions are close to the typical values observed experimentally (see *Favre, 1935; Treske, 1994; Chanson, 2008*).

#### 4.2.5 Conclusion

In this paper, a new approach to handle wave breaking within the framework of hybrid fully non-linear BT models is presented. The model has been developed as an extension of the well-validated NSW shock-capturing code SURF-WB (*Marche et al., 2007*), using hybrid finite volume/finite difference schemes (*Bonneton et al., 2011d*).

The modelling strategy for wave breaking is based on the splitting of S-GN equations between an hyperbolic part corresponding to the NSW and a dispersive term. When the wave is ready to break, we switch locally to the NSW by skipping the dispersive step, such as broken wave fronts can be described as shocks. Energy dissipation

due to wave breaking is then predicted by the shock theory, and do not require to be parametrized. The characterization of wave fronts at each time step is easily performed through the study of local energy dissipation. Combined with simple criteria for the initiation and termination of breaking, we obtain an efficient treatment of wave breaking and broken waves propagation without any complex algorithm to follow the waves. Our method has been extensively validated with laboratory data. In particular, the propagation of regular waves breaking on a sloping beach, solitary wave run-up-run-down as well as overtopping over a seawall have been considered. Finally, promising tests concerning hydraulic bore dynamics were performed, showing that the model is able to reproduce the transitions from undular to purely breaking bores. The study of bore dynamics is a particularly challenging test-case since it results from the complex balance between non-linearities, dispersive effects and energy dissipation due to wave breaking.

Work is in progress concerning the 2DH extension of the model. The splitting method used in this model, initially presented in *Bonneton et al. (2011d)*, can be easily extended to 2DH. Its implementation is in progress. The new 2DH S-GN code could be a powerful tool to study the generation of wave-induced circulations and macro-vortices, which are mainly controlled by alongshore variations in breaking-wave energy dissipation (*Peregrine, 1998; Bonneton et al., 2010*).

### Acknowledgements

The authors would like to thank Prof. Shih-Chun Hsiao and Ting-Chieh Lin, as well as Prof. Serdar Beji and Prof. Jurjen A. Battjes for providing the experimental data. The authors would like to acknowledge the ANR-funded project MISEEVA, which funded M. Tissier's PhD thesis, and the scientific support of Dr. Rodrigo Pedreros. The authors would also like to acknowledge additional financial and scientific support of the French INSU - CNRS (Institut National des Sciences de l'Univers - Centre National de la Recherche Scientifique) program IDAO ("Interactions et Dynamique de l'Atmosphère et de l'Océan"), as well as the ANR-funded project MathOcean (ANR-09-BLAN-0301-01).



## 4.3 Application à l'étude des ondes infragravitaires en zone de surf

### 4.3.1 Généralités sur les ondes infragravitaires

La transformation non-linéaire des vagues en zone de levée et zone de surf peut aboutir à la génération d'ondes longues de périodes caractéristiques de 20 à 200 secondes, appelées ondes infragravitaires. Deux mécanismes principaux ont été proposés dans la littérature pour expliquer leur formation. *Longuet-Higgins and Stewart (1962)* ont montré théoriquement que des ondes longues (de période  $\Delta f$ ) pouvaient être générées par interactions non-linéaires entre des paires d'ondes courtes de fréquences  $f$  et  $f + \Delta f$ . Ces ondes sont tout d'abord liées aux groupes de vagues, puis "relâchées" lors du déferlement et se propagent vers la plage. *Symonds et al. (1982)* ont proposé un second mécanisme de formation, conséquence de la variation temporelle du point de déferlement. En effet, la modulation en amplitude des vagues incidentes induit des oscillations de la position du point de déferlement de période similaire à celle des groupes d'ondes. Ces oscillations sont associées à des variations du niveau d'eau moyen et agissent comme un piston, générant des vagues de période similaire à celle de l'onde de groupe. Dans les deux cas, les ondes longues incidentes se reflètent sur la plage, et des ondes stationnaires ou quasi-stationnaires se mettent généralement en place (*Guza and Thornton, 1985; Masselink, 1995; Sheremet et al., 2002*). Ces ondes infragravitaires dominent généralement la dynamique en eau très peu profonde (*Guza and Thornton, 1982; Ruessink et al., 1998*). Pour des conditions de houle importantes, elles peuvent devenir très énergétiques en zone de jet de rive et être à l'origine de processus importants d'érosion de la plage et de la dune (*Roelvink et al., 2009*).

Des études in-situ récentes (*De Bakker, 2011*) ont montré que dans le cas de plages à pente douce, la dissipation d'énergie des ondes infragravitaires ne pouvait plus être ignorée. La dissipation sur ce type de plage peut être telle que les coefficients de réflexion sont inférieurs à 10-30%, empêchant le développement d'ondes stationnaires, et modifiant de manière significative le transport sédimentaire. Plusieurs mécanismes ont été proposés dans la littérature pour expliquer la dissipation des ondes infragravitaires. Elle peut résulter des phénomènes de friction sur le fond (e.g., *Herbers et al., 1995; Henderson and Bowen, 2002*), ou être la conséquence de transferts d'énergie des ondes infragravitaires vers les vagues courtes (*Henderson et al., 2006; Thomson et al., 2006*). *Van Dongeren et al. (2007)* ont montré récemment que le déferlement des ondes infragravitaires elles-mêmes pouvait être à l'origine d'une dissipation significative sur les plages à pente douce, d'importance bien supérieure à celle provoquée par les phénomènes de friction par exemple.

Plus précisément, l'étude de *Van Dongeren et al. (2007)* a permis de mettre en évidence l'importance de la pente normalisée de la plage,  $\beta$ , sur la dynamique des ondes

infragravitaires. Celle-ci est définie par (*Battjes et al.*, 2004) :

$$\beta = \frac{h_x}{\omega_{LF}} \sqrt{\frac{g}{h}} \quad (4.11)$$

avec  $h_x$  est la pente locale du fond,  $\omega_{LF}$  la pulsation de l'onde infragravitaire, et  $h$  la profondeur d'eau. Cette expression permet de prendre en compte le fait qu'une plage va paraître plus pentue pour une onde longue qu'elle ne l'est pour une onde plus courte, l'onde longue "ressentant" un changement de profondeur plus important à l'échelle de sa longueur d'onde. Le taux de croissance de l'onde infragravitaire pendant la levée est d'autant plus important que  $\beta$  est faible. *van Dongeren et al.* (2002) et *Battjes et al.* (2004) ont également montré que l'importance relative du mécanisme de génération des ondes infragravitaires par transferts d'énergie non-linéaires par rapport à la génération par variation du point de déferlement était d'autant plus forte que la pente normalisée était faible. Enfin, l'étude a montré que la dissipation des ondes infragravitaires à l'approche de la zone de jet de rive pouvait être reliée à la valeur de  $\beta$ . Pour les plus faibles valeurs de  $\beta$ , les ondes infragravitaires dissipent leur énergie en déferlant. Les coefficients de réflexion sont alors très faibles. Pour les plus fortes valeurs de  $\beta$ , les coefficients de réflexion sont bien plus importants, et le déferlement des ondes infragravitaires n'est pas observé.

L'objectif de cette partie est d'évaluer la capacité de notre modèle à reproduire cette dynamique complexe, en considérant deux cas de propagation de houle bichromatique pour lesquels les comportements des ondes infragravitaires sont très différents. Nous utilisons le même jeu de données expérimentales que *Van Dongeren et al.* (2007) (initialement décrit dans *van Noorloos* (2003)), et considérons les séries d'expériences sur houle bichromatique correspondant à la plus faible (cas A-1) et à la plus forte (cas A-4) valeur de la pente normalisée pour ce jeu de données.

### 4.3.2 Validation du modèle pour des houles bichromatiques

Les caractéristiques des houles bichromatiques incidentes sont décrites Tableau 4.2. Pendant les différentes séries d'expériences, des sondes ont été déployées tous les 50 cm en zone de levée et tous les 30 cm en zone de surf. Les comparaisons entre données expérimentales et numériques seront effectuées aux positions présentées Figure 4.12.

Pour les simulations numériques, nous choisissons un pas d'espace  $\delta_x = 0.035\text{m}$  et un pas de temps  $\delta_t = 0.008\text{s}$ . Le domaine de calcul est représenté Figure 4.12. Les termes dispersifs sont supprimés systématiquement pour  $x > 32\text{m}$ .

#### 4.3.2.1 Dynamique des ondes infragravitaires pour une plage à faible pente normalisée (Cas A-1)

Pour cette simulation, nous générons à l'entrée du domaine des houles incidentes bichromatiques de mêmes caractéristiques que celles décrites dans le tableau 4.2, cas A-1.

	$f_1$ (Hz)	$f_2$ (Hz)	$\Delta f$ (Hz)	$a_1$ (m)	$a_2$ (m)	$\beta_b$
A-1	0.6714	0.4761	0.1953	0.06	0.012	0.16
A-2	0.6470	0.5005	0.1465	0.06	0.012	0.22
A-3	0.6348	0.5127	0.1221	0.06	0.012	0.25
A-4	0.6226	0.5249	0.0977	0.06	0.012	0.32
B-1	0.6470	0.5005	0.1465	0.06	0.018	0.21
B-2	0.6470	0.5005	0.1465	0.06	0.024	0.21
B-3	0.6470	0.5005	0.1465	0.06	0.03	0.21
B-4	0.6470	0.5005	0.1465	0.06	0.036	0.20

TABLE 4.2 – Caractéristiques des ondes bi-chromatiques.  $\beta_b = \beta(h = h_b)$ , où  $h_b$  est la profondeur d'eau caractéristique au point de déferlement (*Van Dongeren et al., 2007*).

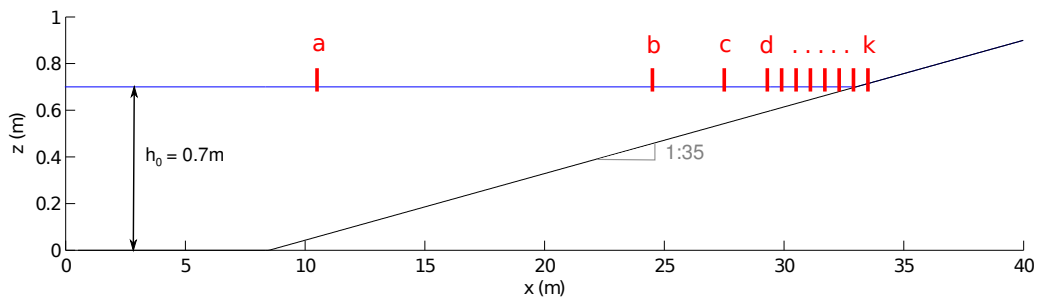


FIGURE 4.12 – Définition du domaine de calcul et positionnement des sondes. Soit  $d = h_0 - b$  la profondeur d'eau au repos. a :  $d = 64.3\text{cm}$  ; b :  $d = 24.3\text{cm}$  ; c :  $d = 15.7\text{cm}$  ; d :  $d = 10.6\text{cm}$  ; e :  $d = 8.9\text{cm}$  ; f :  $d = 7.2\text{cm}$  ; g :  $d = 5.4\text{cm}$  ; h :  $d = 3.7\text{cm}$  ; i :  $d = 2.0\text{cm}$  ; j :  $d = 0.3\text{cm}$  ; k :  $d = -1.4\text{cm}$  ;

Les séries temporelles d'élévation de la surface libre expérimentales et numériques sont comparées Figure 4.13. La figure 4.13a présente l'évolution temporelle des vagues au pied de la plage, et permet de comparer les caractéristiques des vagues incidentes générées et mesurées. Nous observons que l'amplitude de la houle incidente générée par le modèle est légèrement inférieure à celle mesurée. Cela est dû à notre condition limite génératrice qui ne permet pas à l'heure actuelle de générer directement à partir des séries temporelles expérimentales. Les amplitudes calculées par le modèle sont cependant assez proches des données expérimentales, et nous obtenons de plus les mêmes fréquences caractéristiques (voir les spectres Figure 4.15a). Cette différence d'amplitude des vagues incidentes explique les différences observées Figure 4.13b et c, qui correspondent aux sondes en fin de zone de shoaling et juste après l'initiation du déferlement. Les vagues prédites par le modèle, de plus faible amplitude, déferlent légèrement plus tard. L'écart entre données et modèle se réduit ensuite rapidement lorsque l'on progresse dans la zone de surf. En zone de surf interne (d à k), nous obtenons un très bon accord entre données expérimentales et résultats du modèle. Le léger retard des vagues calculées par rapport aux données expérimentales en zone de surf est probablement dû à une sous-estimation du set-up, conséquence de la différence d'amplitude des vagues incidentes. Pendant leur propagation, les fronts déferlés vont s'apparier successivement, aboutissant à une augmentation de la période caractéristique des vagues qui devient celle de l'onde de groupe ( $\Delta f = f_1 - f_2$ ) en eau très peu profonde. Nous reviendrons sur ces processus ultérieurement.

Intéressons nous maintenant à la modulation basse-fréquence (BF) de ces signaux. La Figure 4.14 représente les mêmes séries temporelles que sur la Figure 4.13 mais filtrées de façon à ne garder que la composante  $\Delta f$  et ses multiples (même traitement que dans *Van Dongeren et al. (2007)*). Lors de sa propagation vers la plage, nous observons tout d'abord une amplification de l'onde (levée), puis son raidissement, et enfin une diminution de son amplitude, témoin du déferlement de l'onde longue. Les résultats numériques sont très proches des données expérimentales, même si on retrouve le décalage temporel déjà observé sur les données non-filtrées en zone de surf. Notre modèle arrive donc à reproduire correctement les transformations des ondes infragravitaires, déferlement compris, sans avoir eu besoin d'adapter le modèle de déferlement. De plus, nos simulations ont été effectuées sans insérer de terme de friction, ce qui confirme son rôle mineur dans ce cas de transformation d'ondes infragravitaires.

Enfin, la figure 4.15 compare les spectres à différentes positions pour les données expérimentales et les données de laboratoire. La croissance de la composante  $\Delta f$  pour les sondes les plus au large est bien reproduite par le modèle. On retrouve également, dans les deux cas, que le déferlement des ondes courtes provoque tout d'abord la diminution de l'énergie associée à la composante de fréquence la plus haute,  $f_1$ , ainsi que de ses harmoniques, puis de la composante  $f_2$ . Enfin, pour les plus faibles profondeurs d'eau,

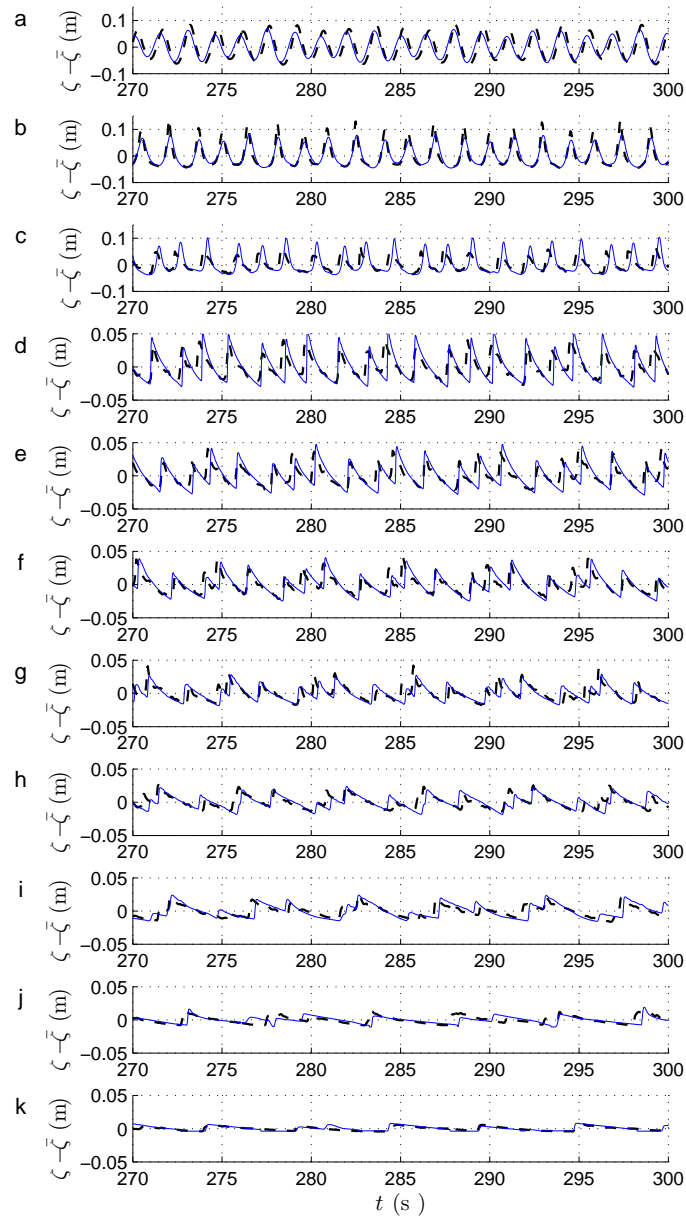


FIGURE 4.13 – Séries temporelles d'élévation de la surface libre calculées (—) et mesurées (- -) pour différentes positions pour le cas A-1. Les positions des sondes sont données sur la figure 4.12.

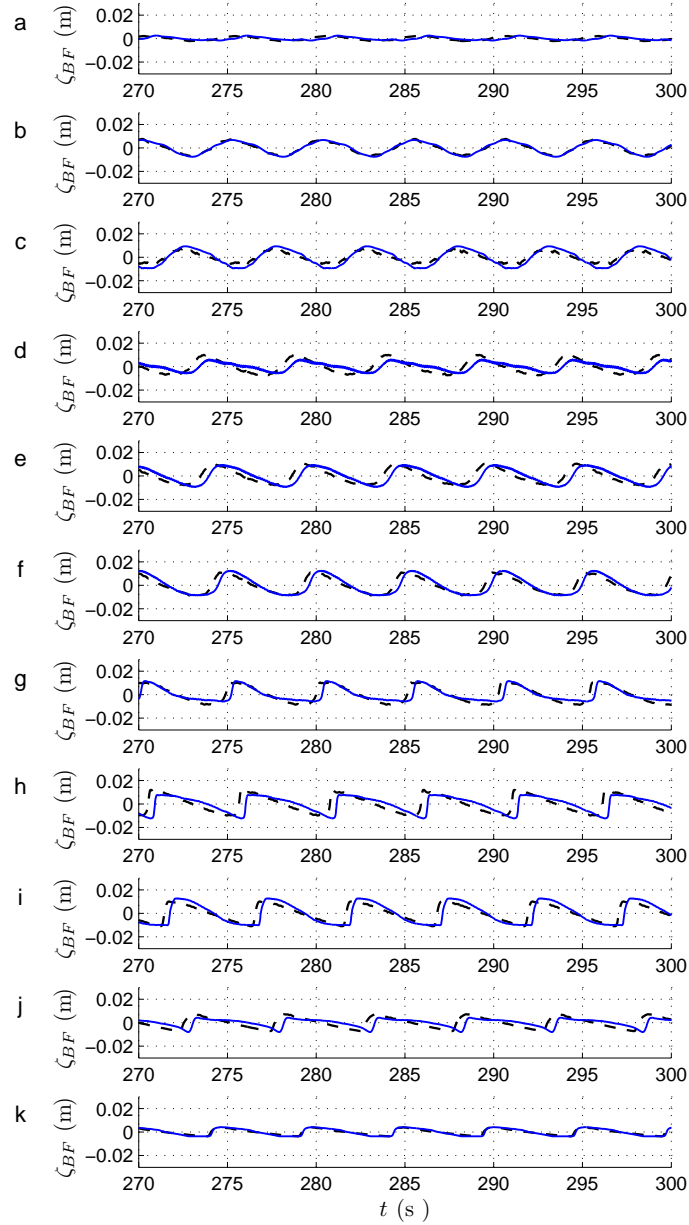


FIGURE 4.14 – Composantes BF des séries temporelles d’élévation de la surface libre (obtenues après filtrage de façon à ne garder que les fréquences multiples de  $\Delta f = f_1 - f_2$ ) pour différentes positions dans le cas A-1. (—) : résultats du modèle; (- -) : données expérimentales ; Les positions des sondes sont définies sur la figure 4.12.

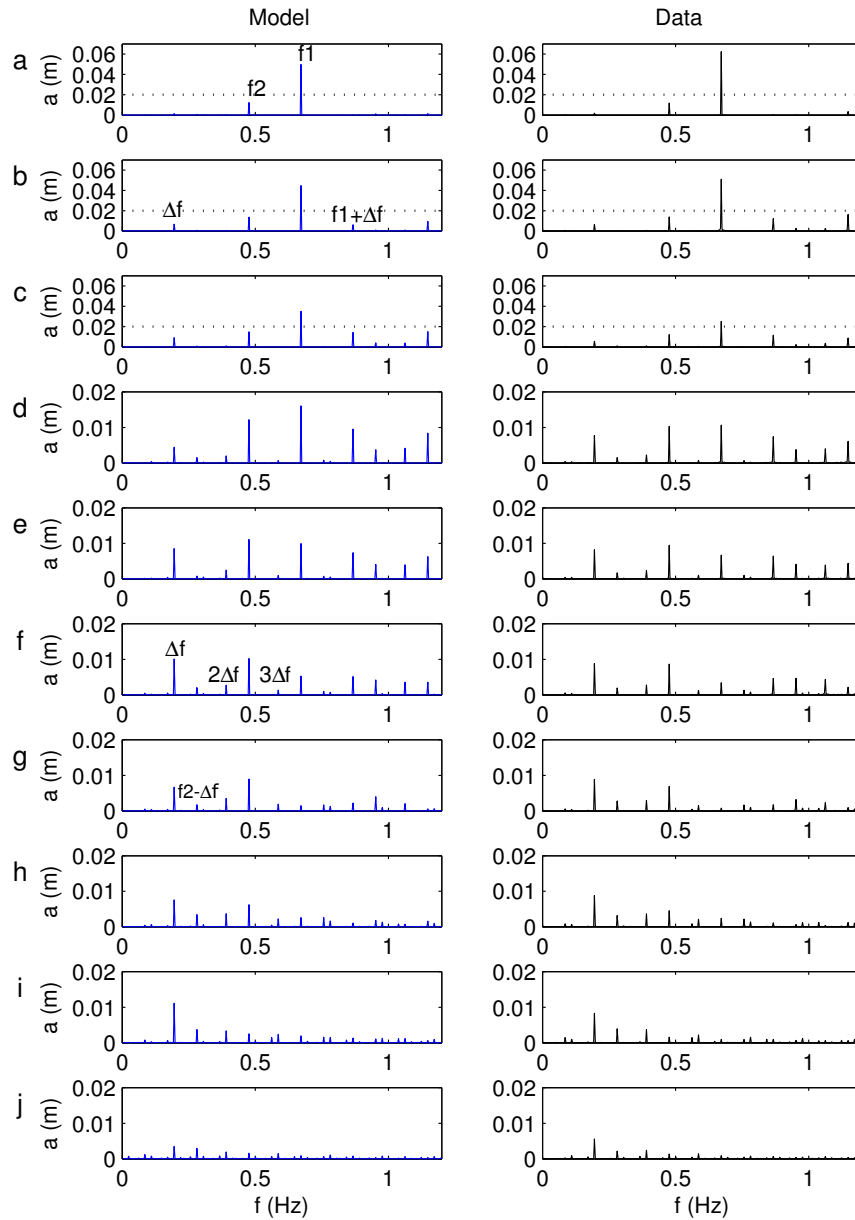


FIGURE 4.15 – Evolution des spectres pour les positions a à j définies sur la figure 4.12, obtenus à partir des données numériques (à gauche) et des données expérimentales (à droite) pour le cas A-1. Attention au changement d'échelle verticale à partir de la figure d.

#### 4 - Prise en compte du déferlement

---

les harmoniques de  $\Delta f$  remplissent tout l'espace spectral. Il n'y a plus de séparation d'échelle claire entre les ondes basse-fréquence et les composantes principales  $f_1$  et  $f_2$ , conséquence du raidissement de l'onde BF. De manière générale, les spectres issus des mesures et ceux calculés à partir du modèle sont proches. L'analyse de l'évolution de la composante  $\Delta f$  semble cependant mettre en avant une réflexion légèrement plus forte pour la simulation numérique (oscillations de l'amplitude de la composante à l'approche du bord). Cette différence devra être analysée plus en détail une fois nos problèmes de condition limite génératrice réglés.

Jusqu'à maintenant, nous avons présenté de façon séparée la dynamique des vagues "courtes" de celle des ondes infragravitaires. Il est pourtant intéressant de considérer les interactions entre les deux pour mieux comprendre la transformation des vagues observée. La figure 4.16 superpose les signaux d'élévation de la surface libre bruts et les ondes infragravitaires correspondantes. Nous voyons que les fronts déferlés s'apparient progressivement, et convergent vers les fronts de l'onde longue. Ces processus sont tels qu'à l'approche de la zone de swash, les vagues "courtes" ont quasiment disparues. Ce sont alors les ondes longues qui déferlent. La figure 4.17a montre que ces processus sont bien reproduits par le modèle. Les lignes verticales permettent de visualiser les appariements successifs qui peuvent être doubles voire triples. La Figure 4.17b est une représentation spatio-temporelle de l'élévation de la surface libre obtenue à partir du modèle. Elle permet d'illustrer cette dynamique complexe. Les lignes claires et foncées correspondent aux positions des crêtes et des creux, et permettent donc de visualiser les trajectoires des vagues. A plusieurs reprises, les trajectoires convergent, traduisant les phénomènes d'appariement. Ceux-ci aboutissent à une augmentation de la période caractéristique, qui devient proche de la période des BF à l'approche de la zone de swash ( $1/\Delta f = 5.12$  s). La vague projetée sur la plage est donc généralement l'onde BF. Afin de mieux comprendre ces phénomènes d'appariements, regardons les champs de vitesse et de hauteur d'eau correspondants (Figure 4.18). Les vagues juste derrière le front de l'onde BF se propagent dans une plus grande profondeur d'eau, et bénéficient du courant induit par l'onde BF, qui est positif au niveau de la crête (cf. vague A sur la figure 4.18). Ces vagues se propagent donc plus vite et auront tendance à rattraper le front de l'onde longue. Au contraire, les vagues courtes juste devant le front vont combiner une plus faible profondeur d'eau, et donc célérité relative au plan d'eau plus faible et un courant moyen négatif. La vague B subit par exemple un courant tel que la vitesse à la crête est proche de zéro (cf. Figure 4.18c), facilitant l'appariement. En utilisant la relation (2.41) avec les valeurs de  $h_1$ ,  $h_2$  et  $U_1$  données par le modèle, on retrouve bien que  $c_b^A > c_b^B$ .



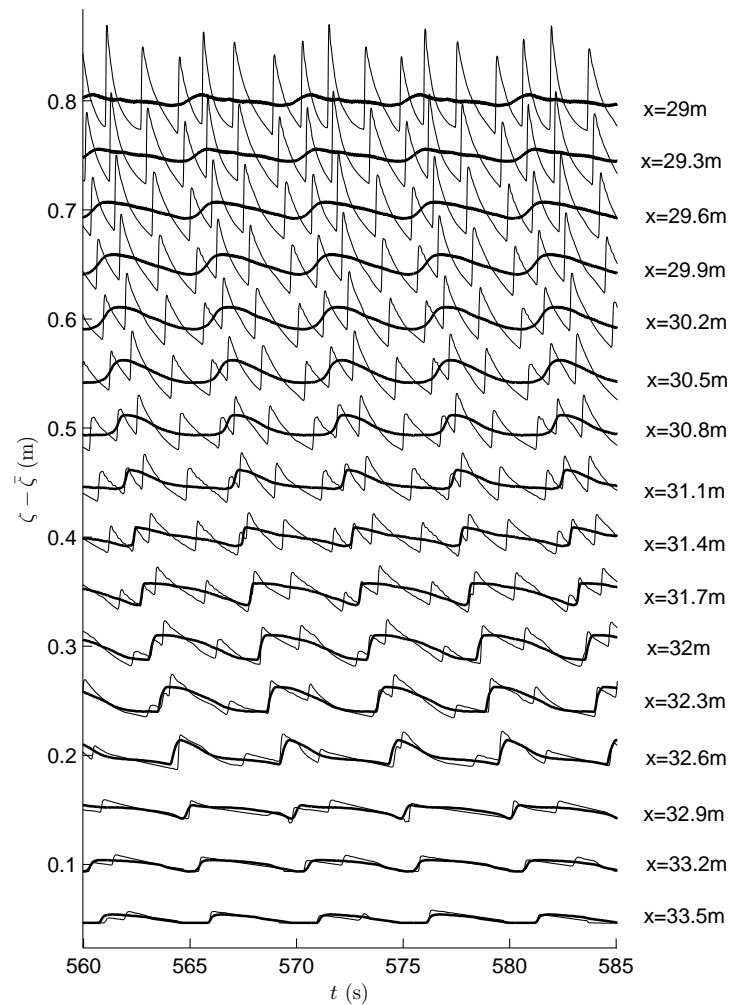


FIGURE 4.16 – Transformation des ondes courtes et infragravitaires en zone de surf interne. Séries temporelles calculées par le modèles pour le cas A-1. Traits fins : signaux d'élévations bruts. Traits épais : composante BF.

## 4 - Prise en compte du déferlement

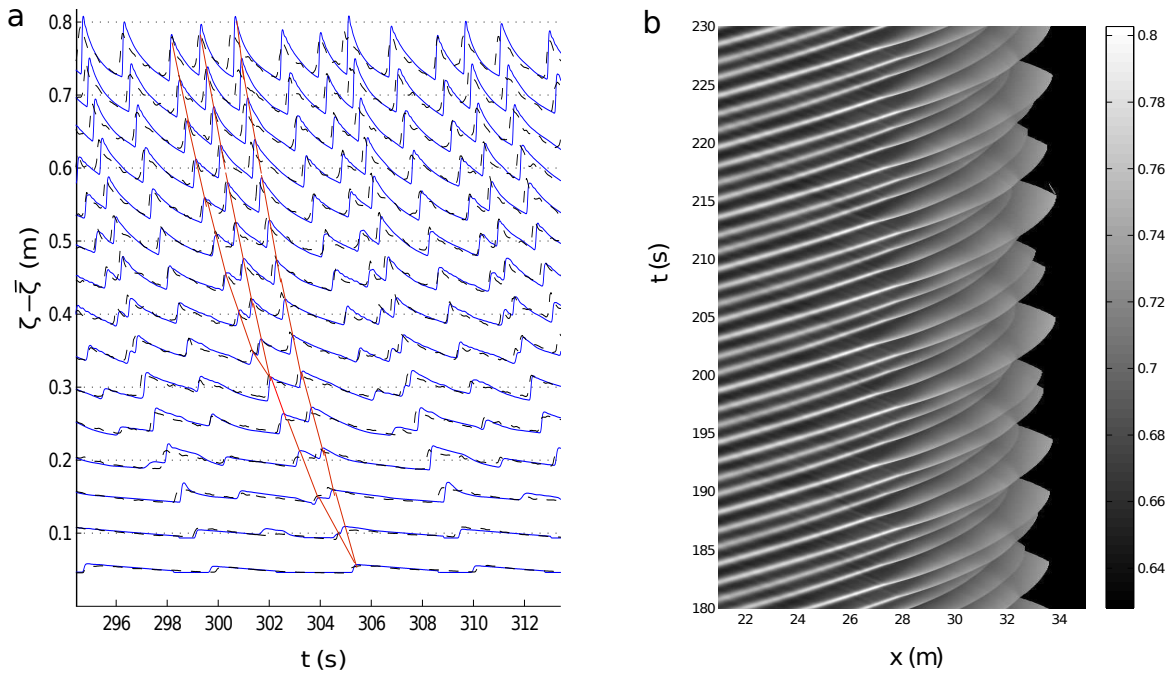


FIGURE 4.17 – Appariements de vagues, cas A-1. (a) Séries temporelles de  $\zeta - \bar{\zeta}$  à différentes positions dans la zone de surf interne. (—) : Prédiction modèle S-GN. (- -) : Données expérimentales. (b) Représentation spatio-temporelle de l'évolution de la surface libre (timestacks). En noir : zone sèche.

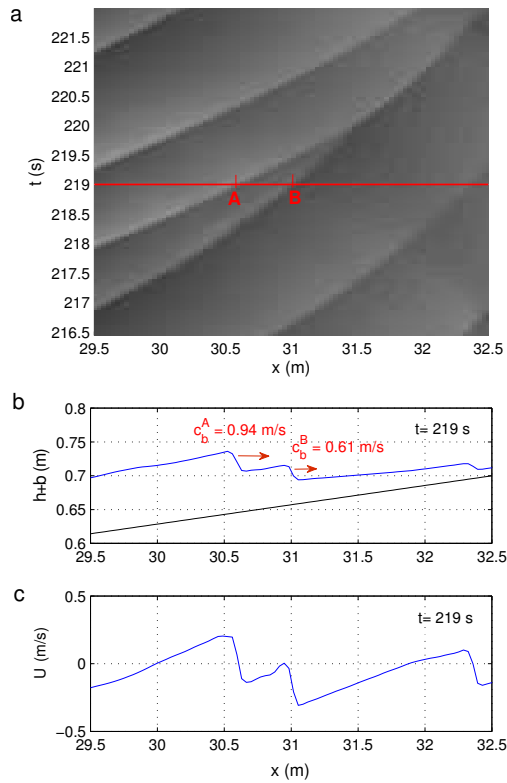


FIGURE 4.18 – Zoom sur un processus d'appariement. (a) Timestack. (b)  $h+b$  en fonction de  $x$  à  $t = 219$  s. (c)  $u$  en fonction de  $x$  à  $t = 219$  s.

### 4.3.2.2 Transformations des ondes infragravitaires pour une forte pente normalisée (cas A-4)

Considérons maintenant le cas A-4, pour lequel le déferlement des ondes infragravitaires n'a pas été observé expérimentalement. La figure 4.19 présente séries temporelles calculées par le modèle et celles mesurées, pour les mêmes positions que précédemment. Dans ce cas encore, l'amplitude de l'onde générée par le modèle au large est légèrement inférieure à celle mesurée, provoquant un décalage du point de déferlement. Les transformations des ondes courtes sont très bien décrites en zone de surf interne. Les modulations du niveau moyen sont également bien décrites, suggérant une bonne description des transformations des ondes basse-fréquence et des transferts d'énergie entre les différentes bandes fréquentielles.

La figure 4.20 montre les mêmes signaux mais après filtrage, en ne gardant que la fréquence  $\Delta f$  et ses multiples. Dans ce cas nous n'observons pas de signes indiquant le déferlement de l'onde basse-fréquence. Une onde quasi-stationnaire se met en place, qui se traduit par des oscillations de l'amplitude des ondes BF lors de la propagation vers la plage.

## 4.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons introduit une nouvelle méthode de gestion du déferlement, permettant de décrire simplement le déferlement de trains de vagues irréguliers sur des bathymétries complexes. Lorsqu'une vague est prête à déferler, les termes dispersifs sont supprimés localement, permettant aux fronts déferlés d'être traités comme des chocs par les parties SV du code. La dissipation n'a donc pas besoin d'être paramétrisée. De plus, l'utilisation de la dissipation correspondant aux étapes SV permet de localiser les fronts à chaque pas de temps, et de déterminer leur état (déferlé ou non) sans avoir besoin de les suivre. D'une manière générale, aucune méthode de suivi des vagues est nécessaire, puisque notre modèle de déferlement ne dépend pas de l'âge du front déferlé. En revanche, des critères doivent être définis pour déterminer quand passer d'un système d'équations à l'autre pour une vague donnée, c'est-à-dire quand initier et arrêter le déferlement.

Ce modèle a été appliqué à différents types de vagues incidentes et de plages. Des cas classiques de propagation de houles périodiques et d'ondes solitaires sur des plages planes ont d'abord été considérés. Ils ont montré que notre modèle de déferlement, bien que simple, donnait des résultats équivalents à ceux utilisant des paramétrisations plus complexes. D'une manière générale, les différents cas tests ont permis de montrer que le modèle donnait de très bons résultats en zone de levée ainsi qu'en zone de surf interne et de jet de rive, mais que le comportement en zone de transition était un peu moins bien décrit. Plus précisément, la décroissance initiale de la vague juste après le déferlement

## 4 - Prise en compte du déferlement

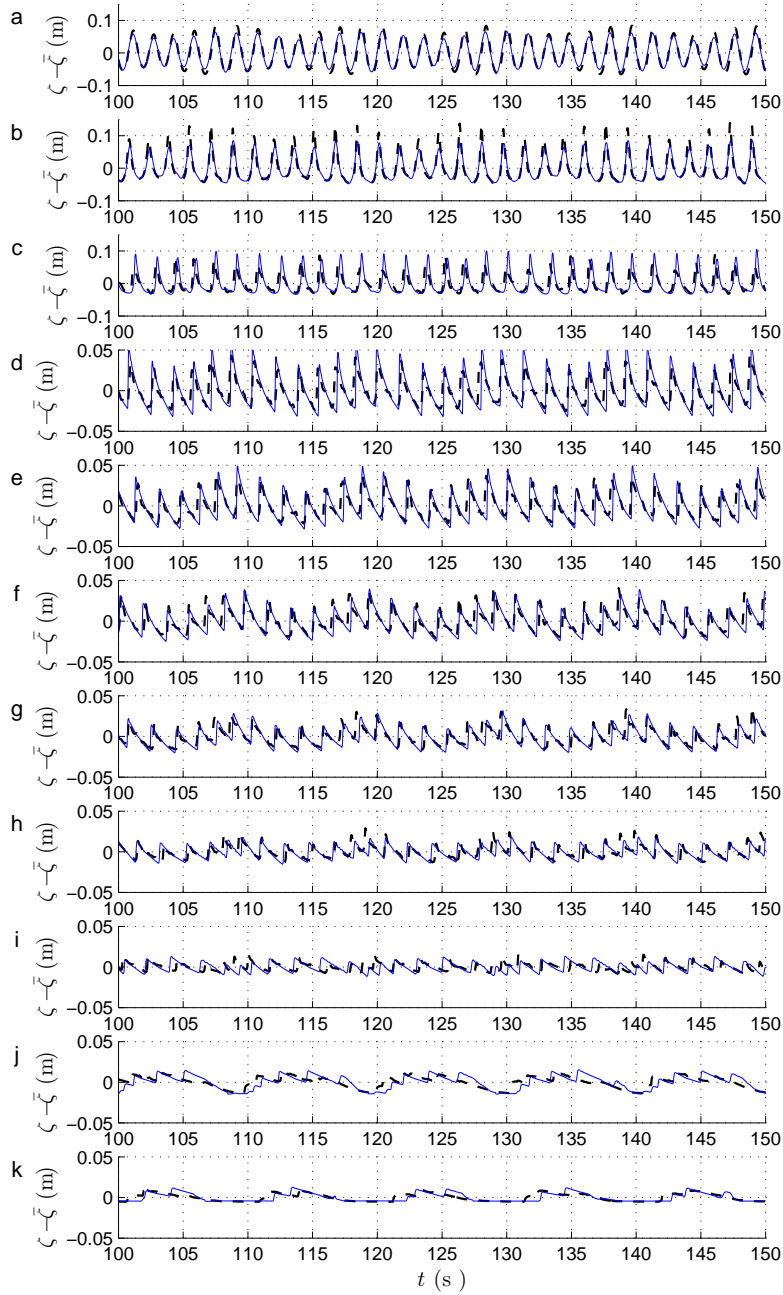


FIGURE 4.19 – Séries temporelles d'élévation de la surface libre calculées (—) et mesurées (- -) pour différentes positions pour le cas A-4.

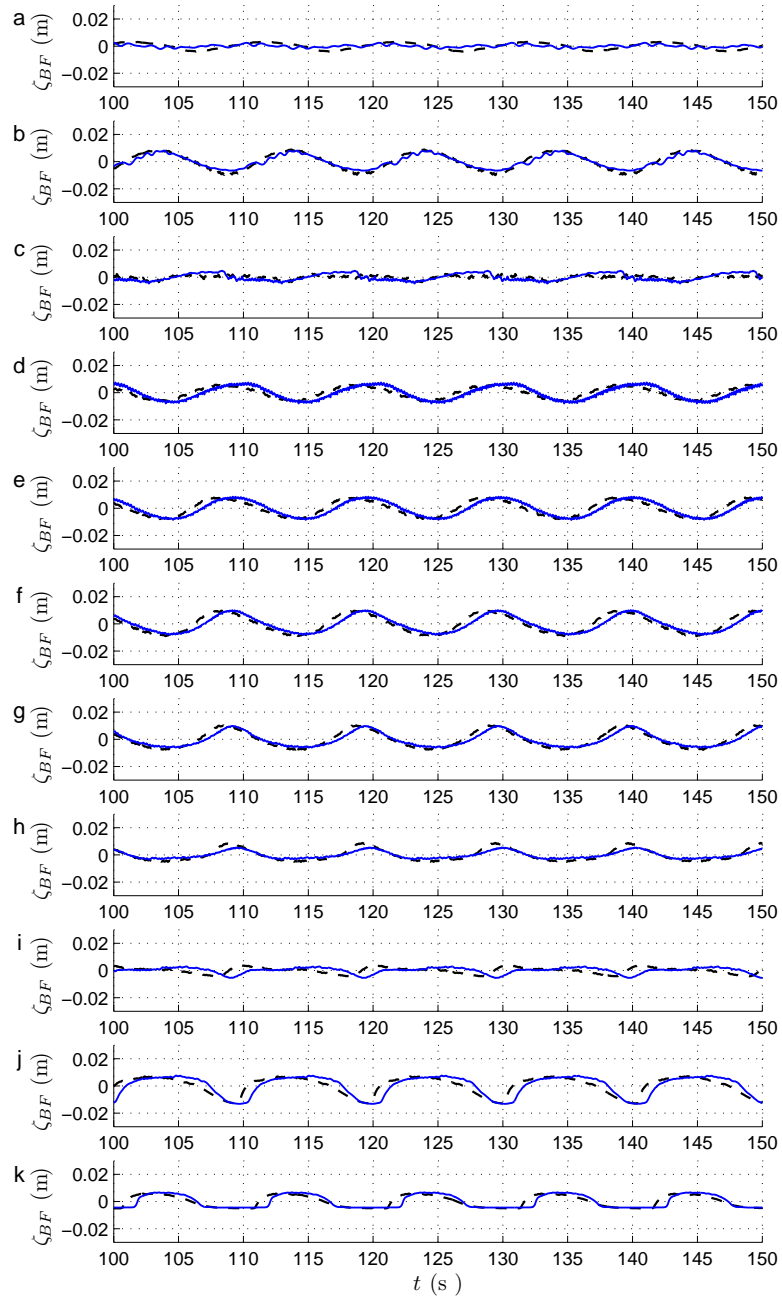


FIGURE 4.20 – Composantes BF des séries temporelles d’élévation de la surface libre (obtenues après filtrage de façon à ne garder que les fréquences multiples de  $\Delta f = f_1 - f_2$ ) pour différentes positions dans le cas A-4. (—) : résultats du modèle ; (- -) : données expérimentales.

#### 4 - Prise en compte du déferlement

---

est un peu moins rapide que celle observée expérimentalement, aboutissant à une zone de transition un peu plus étendue. La transition d'une vague très asymétrique en fin de levée vers une vague de type "dent de scie" s'organise en fait en deux temps. Lorsque l'on passe aux équations de SV au niveau d'une vague en fin de phase de levée, celle-ci va d'abord continuer à se raidir en gardant une hauteur quasi constante, puis les masses d'eau vont se réorganiser afin d'évoluer vers la forme en dent de scie. Ce n'est qu'alors que la hauteur de la vague diminue significativement.

Le modèle a ensuite été validé à l'aide de cas tests plus originaux. Nous nous sommes en particulier intéressés à la description de la propagation de vagues sur une barre. Ce cas test a permis de montrer que notre modèle était capable de gérer l'arrêt du déferlement après la barre, ainsi que les transformations qui en découlent. Des cas de franchissement de digues ont également été considérés avec succès. Enfin, la propagation de houles bichromatiques a été étudiée, et a permis de montrer que le modèle pouvait gérer les variations de la position du point de déferlement. Les bons résultats obtenus en terme d'évolution des ondes infragravitaires (génération et amplification) ont confirmé les bonnes propriétés non-linéaires du modèle S-GN. Le modèle a de plus pu reproduire le déferlement des ondes infragravitaires observé expérimentalement par *Van Dongeren et al.* (2007). La représentation de ce phénomène est certainement facilitée par le fait que notre modèle de déferlement, contrairement à ceux implémentés dans la plupart des modèles de type Boussinesq (*Schäffer et al.*, 1993; *Kennedy et al.*, 2000; *Cienfuegos et al.*, 2010), n'a pas nécessité de calibration spécifique de la dissipation d'énergie pour des vagues "classiques" en zone de surf (vagues courtes). Il peut donc s'appliquer sans nécessiter de développements supplémentaires au déferlement des ondes longues.

Le nouveau modèle numérique fortement non-linéaire faiblement dispersif, introduit dans les chapitres 3 et 4, est donc capable de décrire la transformation non-linéaire des vagues de la zone de levée à la zone de jet de rive. Il sera appelé SURF-GN par la suite.

# Chapitre 5

## Dynamique des ondes longues de type tsunami en zone littorale

Dans ce chapitre, nous utilisons le modèle SURF-GN pour analyser la dynamique des ondes longues de type tsunami en zone littorale. Ce travail a fait l'objet d'une publication dans le *Journal of Coastal Research* dans le cadre de la conférence ICS2011 (*Tissier et al.*, 2011, cf. Annexe B). Ce chapitre présente une version étendue de ce papier.

### 5.1 Introduction

Lorsque les vagues de tsunami se propagent dans l'océan ouvert, elles sont généralement très faiblement dispersives. Dans le cas de tsunamis associés à des tremblements de terre par exemple, l'influence des effets dispersifs est généralement négligée. En effet, ces tsunamis, considérés comme ceux au plus fort potentiel destructif (effet moins local) résultent de déplacements du fond sous-marin sur de très larges étendues spatiales, générant des vagues de longueur d'onde bien plus grande que les profondeurs des océans (de l'ordre de la centaine de kilomètres). Cependant, lorsque la propagation se fait sur de longues distances, c'est-à-dire à l'échelle du bassin océanique, la lente accumulation des effets dispersifs, même faibles, peut finir par modifier les caractéristiques des trains de vagues de manière significative (*Grilli et al.*, 2007). Leur prise en compte peut alors permettre d'améliorer la prédiction de l'impact des tsunamis, en donnant une description plus détaillée du train de vagues associé (par exemple *Dalrymple et al.*, 2006). Les tsunamis générés par des glissements de terrain sont eux de plus faible longueur d'onde, et donc par nature plus dispersifs, et cela dès leur génération (*Abadie et al.*, 2011). Une étude consacrée au tsunami de 1998 en Papouasie Nouvelle-Guinée (*Lynett et al.*, 2003) a par exemple montré qu'il était indispensable de prendre en compte les effets dispersifs dans le cas de tsunamis générés par des glissements de terrain, sous peine de ne pas obtenir une bonne estimation des caractéristiques des vagues off-shore, et donc une bonne description du run-up.



FIGURE 5.1 – En haut : Le tsunami de Sumatra en 2004 approchant l’île de Koh Jum au large de la côte thaïlandaise. En bas : Le tsunami de Sumatra (2004) approchant une plage de Thaïlande. Photos issues de *Madsen et al.* (2008).

A l’approche de la côte, les effets dispersifs ne sont plus négligeables et peuvent affecter de manière significative les transformations des fronts de tsunami. En eau peu profonde, la forme du front va dépendre de l’importance relative des effets dispersifs, des effets non-linéaires et de la quantité d’énergie dissipée par le déferlement. En conséquence, le front peut prendre une grande variété de formes, avec aux deux extrêmes, les ressauts ondulés non-déferlants et les ressauts purement déferlants sans ondulations. De tels ressauts ondulés ont par exemple été observés lors du tsunami de Sumatra en 2004, au niveau du détroit de Malacca (voir Figure 5.1). Des transformations similaires ont été observées pendant le tsunami de 1983 en mer du Japon, où les vagues de tsunamis ont remonté plusieurs rivières sous la forme de ressauts, suivis ou non d’ondulations (*Tsuji et al.*, 1991). Le développement de ressauts ondulés dans les rivières lors de tsunamis a été étudié plus récemment par *Yasuda* (2010), qui a appliqué un modèle de type Boussinesq au développement de ressauts ondulés créés par le tsunami de septembre 2003 au Japon.

Afin d’illustrer ces transformations, un parallèle peut être fait entre vagues de tsunamis dans les rivières et mascarets (*tidal bores*). En effet, si les processus à l’origine de la génération des mascarets (propagation de l’onde de marée dans l’estuaire) et des tsunamis sont totalement différents, ces ondes longues vont former des fronts ayant de nombreux points communs (*Higman et al.*, 2004). Ceci est illustré Figure 5.2, où des photos prises sur la Garonne à différentes localisations témoignent des différents types de fronts décrits précédemment : purement ondulés, ondulés partiellement déferlés, ou purement déferlés sans ondulations (voir aussi *Bonneton et al.*, 2011*a,c*).





FIGURE 5.2 – Mascarets se propageant sur la Garonne (*Bonneton et al., 2011a*)

L'observation de l'impressionnant run-up de vagues de 15 à 20 secondes de période sur la côte thaïlandaise associées à la formation d'un ressaut ondulé pendant le tsunami de Décembre 2004 est à l'origine des travaux de *Grue et al.* (2008). *Grue et al.* ont étudié numériquement le développement du ressaut ondulé pendant la propagation du tsunami dans le détroit de Malacca, et ont montré que la formation du train d'ondes secondaires provoquait une nette augmentation de la hauteur du front. Les auteurs ont de plus montré que les différentes ondulations secondaires pouvaient se transformer en une succession d'ondes solitaires, suggérant un effet important sur le run-up. *Løvholt et al.* (2008) ont également étudié le développement d'un tel ressaut ondulé dans le cas d'un hypothétique tsunami provoqué par un glissement de terrain de l'île de La Palma. Des conclusions similaires à celles de *Grue et al.* (2008) ont été tirées concernant l'importance de la prise en compte des effets dispersifs pour mieux appréhender l'impact des tsunamis sur la côte. Cependant, comme le soulignent les auteurs, le déferlement bathymétrique, non pris en compte dans ces deux études, limiterait certainement la croissance des ondulations. Des études complémentaires sont nécessaires pour quantifier ces effets.

En fait, très peu d'études ont été consacrées à l'évolution de ressauts ondulés de type tsunami en eau peu profonde et aux conséquences du déferlement des ondes secondaires sur la dynamique du ressaut. On peut pourtant se demander quel va être l'effet du déferlement des vagues secondaires sur la dynamique globale du front. Ce déferlement va-t-il aboutir à la disparition des ondulations ? Comment va-t-il affecter l'énergie globale du ressaut ? En effet, si le développement d'ondulations provoque une augmentation de la hauteur du front (peut être doublée), on peut se demander si la somme de l'énergie dissipée par les vagues individuelles lors de leur déferlement ne va pas être plus importante que l'énergie qui aurait été dissipée dans le front d'un ressaut purement déferlant. Ces questions sont déterminantes pour mieux comprendre l'impact réel d'un tsunami d'un point de vue de l'inondation et de l'impact sur les structures côtières. Afin d'y répondre, un modèle capable de bien représenter la dynamique des différents types de fronts, ainsi que les transitions d'un type de bore à l'autre est nécessaire. Pourtant, à notre connaissance, les études numériques dédiées à la dynamique des fronts basées sur des modèles moyennés sur la verticale ont été généralement consacrées soit aux ressauts purement déferlant avec des modèles de type Saint-Venant (voir *Brocchini and Dodd*, 2008), soit aux ressauts ondulés avec des modèles de type Boussinesq (*Wei et al.*, 1995; *Soares-Frazão and Guinot*, 2008, par exemple), rendant difficile l'étude des phénomènes décrits précédemment. Une nouvelle étape a été franchie récemment par *Mignot and Cienfuegos* (2009), qui ont appliqué le modèle SERR1D de type Boussinesq fortement non-linéaire à la description des écoulements dans les rivières, avec en particulier la formation de chocs. Ils ont montré que leur modèle était capable de décrire les principales transformations des fronts, mais mirent en évidence certaines limitations dues à leur paramétrisation du déferlement, développée et calibrée spécifiquement pour la description des vagues en zone

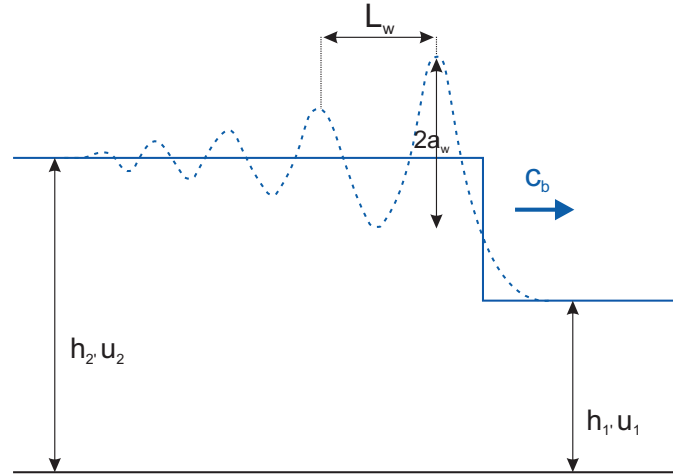


FIGURE 5.3 – Vue schématique d’un ressaut hydraulique et définition des variables. (—) : cas déferlant. (- - -) : cas ondulé.

de surf.

*Grue et al.* (2008) ont montré que le train de vagues se développant pendant la propagation du tsunami dans le détroit de Malacca présente des caractéristiques semblables à celles de ressauts hydrauliques ondulés classiques décrits dans les travaux de *Favre* (1935) et *Peregrine* (1966) par exemple. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons dans un premier temps à la dynamique de ces ressauts, et vérifierons si notre modèle est capable de décrire les différents types d’évolution des fronts dans ce cas académique (Parties 5.2 et 5.3). Cette étape est un pré-requis essentiel pour pouvoir décrire l’évolution des tsunamis dans des cas réels. Nous nous intéresserons dans un deuxième temps au développement d’un ressaut ondulé plus réaliste, résultant des transformations d’une onde longue de type tsunami, et tenterons d’évaluer les conséquences de la transformation du front sur le run-up (Partie 5.4).

## 5.2 Généralités sur les ressauts hydrauliques

### 5.2.1 Physique de base du ressaut

Un ressaut hydraulique, ou *bore*, est la transition entre deux niveaux uniformes d’eau. Sous leur forme la plus classique, les ressauts hydrauliques sont turbulents : la transition entre les deux niveaux d’eau est caractérisée par la présence d’un rouleau de déferlement (*roller*) dont la largeur est égale à quelques fois la profondeur d’eau. Si la différence entre les niveaux d’eau est suffisamment faible le front ne va pas déferler et un train d’ondulations secondaires va se développer (cf. Figure 5.3).

*Peregrine* (1966) a donné une explication physique simple du développement de ces ressauts ondulés. Considérons à l’instant initial un front d’onde longue correspondant à une transition douce entre deux niveaux d’eau tels que  $h_2/h_1 \ll 1$  (cf. Figure 5.4).

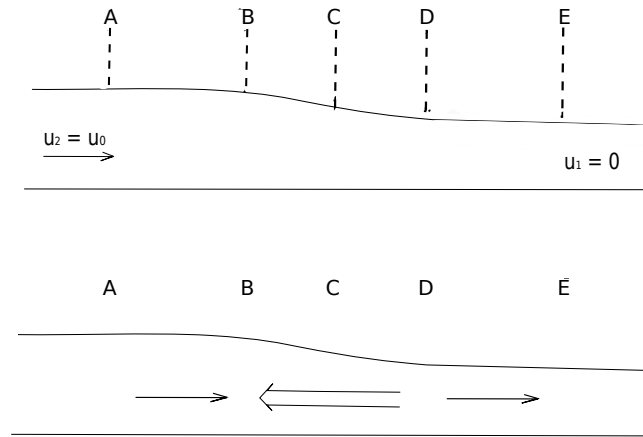


FIGURE 5.4 – Développement d'un ressaut ondulé (*Peregrine, 1966*)

La première phase d'évolution est hydrostatique. Les effets non-linéaires prédominent et provoquent le raidissement progressif de la vague. Au bout d'un certain temps, la pente de la vague va être telle que les effets sur la pression de l'accélération verticale du fluide ne sont plus négligeables. Cette perte d'hydrostaticité est responsable du développement des ondulations au niveau du front. Supposons que la vague de la Figure 5.4 ait atteint ce stade. Les points de courbure maximale (B et D) sont ceux où les écarts à la pression hydrostatique sont les plus importants. La courbure au point B (respectivement D) résulte en une pression inférieure (supérieure) à la pression hydrostatique. Ces modifications du champ de pression vont résulter en la création de gradients de vitesses qui convergent vers B, et qui divergent de D. Une surélévation de la surface libre est alors observée en B, tandis qu'une dépression se développe en D. Les mêmes mécanismes se mettent en place au niveau des points E et A dans une moindre mesure, et ainsi de suite, aboutissant au développement du train d'ondes secondaires.

Il a été montré expérimentalement que l'intensité du ressaut  $I_r = (h_2 - h_1)/h_1$ , ou de façon équivalente son nombre de Froude  $Fr_1 = (c_b - u_1)/(gh_1)^{1/2}$  détermine la forme du front (voir par exemple *Favre, 1935; Binnie and Orkney, 1955; Treske, 1994; Chanson, 2010*).  $Fr_1$  peut être ré-écrit comme une fonction de  $h_2/h_1$  seulement en utilisant les lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement au niveau du front (voir détails dans le chapitre 2, §2.3) :

$$c_b - u_1 = \left( \frac{gh_2}{2h_1} (h_2 + h_1) \right)^{1/2} \quad (5.1)$$

$$c_b - u_2 = \left( \frac{gh_1}{2h_2} (h_2 + h_1) \right)^{1/2}, \quad (5.2)$$

qui permettent d'obtenir

$$Fr_1 = \sqrt{\frac{(2h_2/h_1 + 1)^2 - 1}{8}}. \quad (5.3)$$

Trois types principaux de ressauts peuvent être observés. Nous appellerons par la

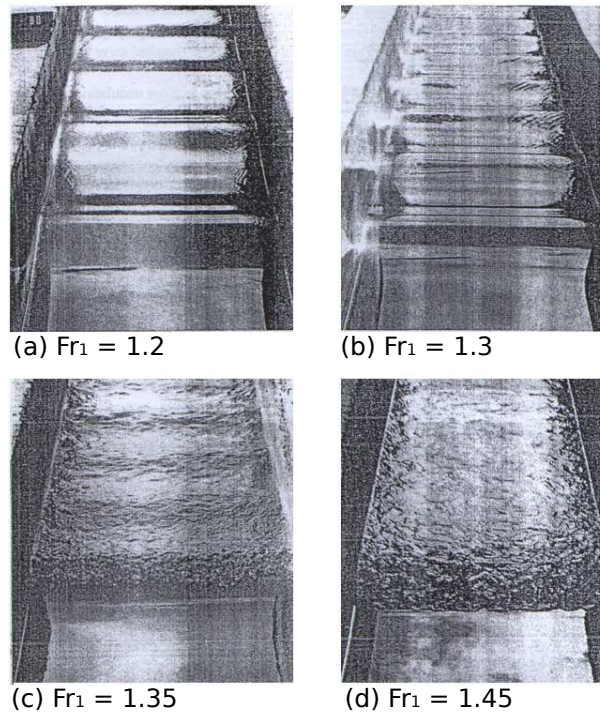


FIGURE 5.5 – Formes caractéristiques des ressauts hydrauliques en fonction de leur nombre de Froude (Adapté de *Treske*, 1994). Canal rectangulaire, fond plat. (a) et (b) : oscillants non-déferlants ( $Fr_1 < Fr_a$ ); (c) oscillant déferlant ( $Fr_a < Fr_1 < Fr_b$ ); (d) complètement déferlant ( $Fr_1 > Fr_b$ ).

suite  $Fr_a$  et  $Fr_b$  les nombres de Froude critiques correspondant aux transitions entre les différents ressauts ( $Fr_a < Fr_b$ ). Pour  $Fr_1 < Fr_a$  des ressauts ondulés (non-déferlants) se développent. Les études expérimentales ont montré que l'amplitude (respectivement la longueur d'onde) des oscillations secondaires croît (décroit) lorsque  $Fr_1$  augmente (cf. photos Figure 5.5a,b). Lorsque  $Fr_a < Fr_1 < Fr_b$ , des ondulations se développent toujours, mais au moins l'une d'entre elle est déferlée (généralement la première vague). Un "aplatissement" du train d'ondes secondaires par rapport au cas non-déferlé est alors observé (*Chanson*, 2010). Ceci peut être observé Figure 5.5c. Pour  $Fr_1 > Fr_b$  un ressaut "classique" turbulent est observé, sans ondulations (Figure 5.5d).

Différentes valeurs des nombres de Froude critiques ( $Fr_a$  et  $Fr_b$ ) peuvent être trouvées dans la littérature. Ces transitions vont en fait dépendre des conditions expérimentales telles que le confinement latéral, mais aussi du type de ressaut hydraulique considéré, statique ou en translation (*Chanson and Montes*, 1995). Dans le cadre de cette étude sur la transformation des ondes longues de type tsunami, nous nous intéresserons principalement au ressaut en translation. Dans ce cas, il a été montré que  $Fr_a$  est généralement de l'ordre de 1.3, et  $Fr_b$  est compris entre 1.5 et 1.9 (*Chanson*, 2010).

### 5.2.2 Approche de *Lemoine* (1948)

Dans la théorie classique des ressauts hydrauliques en eau peu profonde, les relations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement sont utilisées pour estimer la dissipation d'énergie,  $D_b$ , au niveau du front. Elle s'exprime de la façon suivante (voir aussi §2.2) :

$$D_b = \frac{\rho g |Q_b| H^3}{4 h_1 h_2} = \frac{\rho g}{4} \left( \frac{g(h_1 + h_2)}{2h_1 h_2} \right)^{1/2} (h_2 - h_1)^3, \quad (5.4)$$

avec  $Q_b = h_1(u_1 - c_b) = h_2(u_2 - c_b)$  le flux de volume à travers le front d'onde dans le référentiel lié à la vague.

Dans le cas déferlant, cette énergie est principalement dissipée par la turbulence au niveau du front. Bien que peu d'études ne l'aient démontré de manière quantitative, il est communément admis que dans le cas non-déferlant, l'excès d'énergie est majoritairement évacué grâce à la formation d'ondulations. *Lemoine* (1948) fut le premier à corrélérer la perte d'énergie au niveau du front à l'énergie transportée par les ondulations. D'autres auteurs suggérèrent qu'il fallait également tenir compte de la viscosité pour justifier la perte d'énergie au niveau du ressaut dans le cas non-déferlant (par exemple *Benjamin and Lighthill*, 1954). Récemment, *Kalisch and Bjørkavåg* (2010) ont montré numériquement dans un cas idéalisé (pas de déferlement ni de viscosité) que la prise en compte des effets dispersifs était suffisante pour expliquer cette perte d'énergie, confirmant l'hypothèse de base du raisonnement de *Lemoine* (1948). La théorie de *Lemoine*, bien que très simple, permet d'estimer l'ordre de grandeur de l'amplitude  $a_w$  et de la longueur d'onde  $L_w$  des ondulations. Elle est basée sur deux faits d'expériences :

1. Les lois qui s'appliquent au ressaut non-ondulé restent vraies pour le cas ondulé en ce qui concerne les profondeurs moyennes,
2. Les ondulations secondaires se propagent à la vitesse du front, ce qui signifie que les ondulations sont stationnaires dans le référentiel lié au front.

Elle suppose également que les ondulations sont d'amplitudes suffisamment faibles pour que la théorie linéaire leur soit applicable. La célérité des ondes secondaires dans le référentiel lié au fluide en mouvement (de vitesse  $u_2$ ) est donnée par  $c_\varphi = ((g/k) \tanh(kh_2))^{1/2}$  où  $k = 2\pi/L_w$  est le nombre d'onde des ondulations. Si les ondulations sont stationnaires dans le référentiel du front, cela signifie que :

$$c_\varphi + u_2 = c_b. \quad (5.5)$$

En utilisant les relations (5.5) et (5.2), on obtient l'expression suivante pour la longueur d'onde :

$$\frac{L_w}{h_2} \tanh\left(2\pi \frac{h_2}{L_w}\right) = \pi \frac{h_1}{h_2} \left(1 + \frac{h_1}{h_2}\right). \quad (5.6)$$

Afin d'estimer l'amplitude  $a$ , on effectue un bilan énergétique. On utilise le postulat selon lequel le flux d'énergie des ondes secondaires dans le référentiel du front,  $F^{front}$ ,

est responsable de la perte d'énergie exprimée par la relation (5.4). La vitesse de groupe des ondes secondaires dans le référentiel du fluide en mouvement est :

$$c_g = \frac{1}{2}c_\varphi \left( 1 + \frac{2kh_2}{\sinh(2kh_2)} \right).$$

Dans le référentiel du front, on a donc  $c_g^{front} = c_g + u_2 - c_b$ , i.e., d'après (5.5)  $c_g^{front} = c_g - c_\varphi$ . On a donc

$$c_g^{front} = c_\varphi \left( \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2kh_2}{\sinh(2kh_2)} \right) - 1 \right).$$

Le flux d'énergie dans le référentiel lié au front est défini par :

$$\begin{aligned} F^{front} &= E c_g^{front} \\ &= \frac{1}{2} \rho g a_w^2 c_\varphi \left( \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2kh_2}{\sinh(2kh_2)} \right) - 1 \right). \end{aligned}$$

$F^{front} = D_b$  équivaut alors à :

$$\frac{\rho g Q_b H^3}{4 h_1 h_2} = \frac{1}{2} \rho g a_w^2 c_\varphi \left( \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2kh_2}{\sinh(2kh_2)} \right) - 1 \right),$$

avec  $Q_b = h_2(u_2 - c_b) = -h_2 c_\varphi$ . Après simplifications, on obtient :

$$\frac{a_w}{h_2} = \left( \frac{h_2 - h_1}{h_2} \right) \left( \frac{h_2 - h_1}{h_1} \right)^{1/2} \left( 1 - \frac{2kh_2}{\sinh(2kh_2)} \right)^{-1/2}. \quad (5.7)$$

En utilisant les relations (5.7) et (5.6), on peut alors caractériser les trains d'ondulations secondaires pour chaque nombre de Froude.

**Approximation de la théorie de Lemoine** Pour des ressauts correspondant à des nombres de Froude proches de 1, ces expressions peuvent être simplifiées. En faisant l'hypothèse peu profond ( $\frac{h_2}{L_w} \ll 1$ ), on a :

$$\tanh(2\pi h_2/L_w) \approx (2\pi h_2/L_w) - (2\pi h_2/L_w)^3/3.$$

Si on suppose de plus  $(h_2 - h_1)/h_2 \ll 1$ , i.e.

$$\begin{aligned} \frac{h_1}{h_2} \left( 1 + \frac{h_1}{h_2} \right) &= \left( 1 - \frac{h_2 - h_1}{h_2} \right) \left( 2 - \frac{h_2 - h_1}{h_2} \right) \\ &\approx 2 - 3 \frac{h_2 - h_1}{h_2}, \end{aligned}$$

on obtient alors :

$$\frac{L_w}{h_2} \sim \frac{2\pi\sqrt{2}}{3} \left( \frac{h_2 - h_1}{h_1} \right)^{-1/2}. \quad (5.8)$$

De façon similaire, (5.7) devient :

$$\frac{a_w}{h_2} \sim \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{h_2 - h_1}{h_1} \right). \quad (5.9)$$

Appelons  $\epsilon_w = a_w/h_2$  le paramètre adimensionné caractérisant les non-linéarités des oscillations secondaires, et  $\mu_w = (h_2/L_w)^2$  celui caractérisant les effets dispersifs. Les relations (5.9) et (5.8) sont d'intérêt puisqu'elles indiquent que les paramètres adimensionnés caractérisant les ondulations secondaires sont proportionnels à l'intensité du ressaut  $I_r$ . Ainsi, quelque soit le type de ressaut considéré, ondulé ou déferlant, sa dynamique est contrôlée par un seul paramètre adimensionné, l'intensité du ressaut  $I_r$ , ou de façon équivalente son nombre de Froude  $Fr_1$ .

### 5.3 De ressaut ondulé à ressaut déferlant

#### 5.3.1 Développement et propagation d'un ressaut ondulé

Une des premières études numériques concernant le développement de ressauts ondulés a été réalisée par *Wei et al.* (1995). En comparant les prédictions d'un modèle de type Boussinesq fortement non-linéaire avec son équivalent faiblement non-linéaire, il a montré que la prise en compte des fortes non-linéarités permettait d'obtenir une bien meilleure description de la dynamique du front et des caractéristiques des ondes secondaires. L'objectif de cette partie est de vérifier que notre modèle S-GN arrive à reproduire correctement le développement et la propagation d'un ressaut purement ondulé, en comparant les prédictions du modèle aux données de laboratoire décrites dans *Soares-Frazão and Zech* (2002) et *Soares-Frazão and Guinot* (2008). Dans ces études, le développement de ressauts ondulés a été analysé pour différents nombres de Froude. Nous présenterons ici le cas  $Fr_1 = 1.104$ .

Les conditions expérimentales sont les suivantes. On considère un canal horizontal, de profondeur  $h_1 = 0.251$  m, relié à un réservoir rempli d'eau. L'eau dans le canal est initialement au repos, et à  $t = 0$ , la porte séparant le réservoir du canal est levée brutalement, provoquant un débit en entrée du canal de  $Q_0 = 0.06$  m<sup>3</sup>/s. Un ressaut hydraulique est créé, et se propage. Six sondes, synchronisées en temps, ont été déployées dans le canal pendant ces expériences (L1 est la sonde la plus proche du réservoir, L6 la plus éloignée).

Pour nos simulations, nous considérons un pas d'espace  $\delta_x = 0.2$  m et un nombre CFL de 0.9. La Figure 5.6 compare les séries temporelles d'élévation de la surface libre mesurées et celles prédites par le modèle. Il est tout d'abord important de noter que les signaux sont en phase, ce qui signifie que la célérité du front,  $c_b$ , est bien reproduite par le modèle. De plus, les ondulations secondaires sont correctement prédites, tant au niveau de leur longueur d'onde que de leur amplitude, tout au moins pour les ondulations les plus importantes. On peut remarquer que la croissance de la première vague est plus rapide que ce qui est prédit par le modèle. Une sous-estimation similaire avait été observée par *Soares-Frazão and Guinot* (2008) avec leur modèle de type Boussinesq faiblement dispersif.



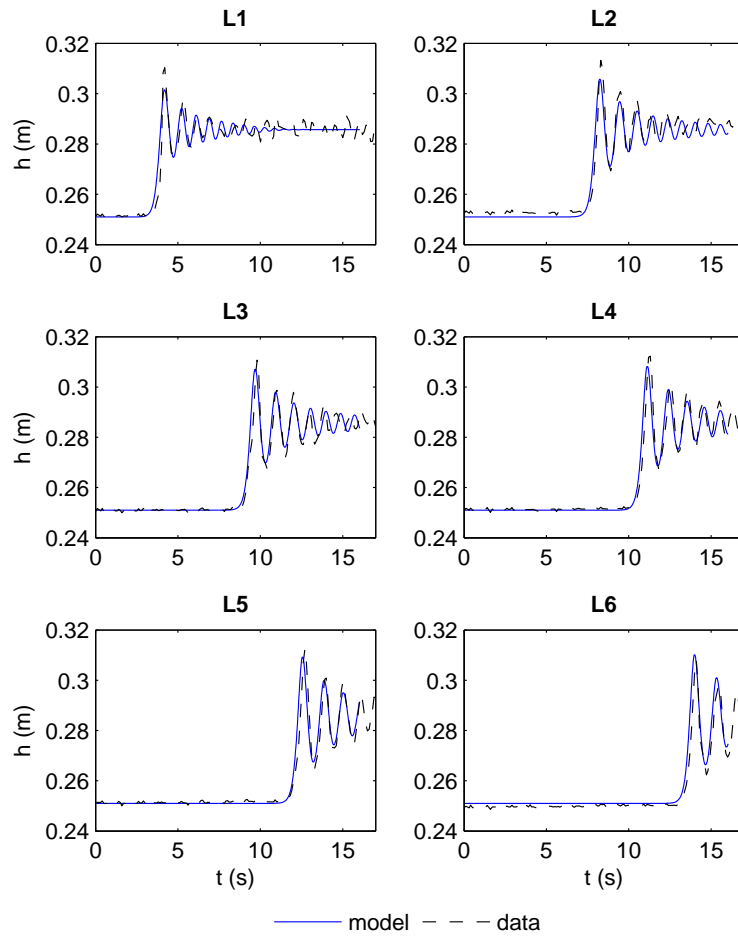


FIGURE 5.6 – Comparaisons entre les séries temporelles de profondeur d'eau mesurées (- -), Soares-Frazão and Zech (2002), et celles prédites par SURF-GN (—). Soares-Frazão and Zech (2002),  $Fr_1 = 1.104$ .

### 5.3.2 Prédiction des différents types de ressauts par le modèle

Dans cette partie, nous cherchons à vérifier de manière qualitative si notre modèle prédit correctement les principales caractéristiques des différents types de ressauts, c'est-à-dire s'il est capable de décrire la dynamique des ressauts sur une large gamme de nombres de Froude ( $1.02 \leq Fr_1 \leq 1.9$ ). Les conditions initiales des simulations sont les suivantes :

$$\begin{cases} h(x, 0) = \frac{1}{2}(h_2 - h_1)(1 - \tanh(x/l_t)) + h_1, \\ u(x, 0) = \frac{1}{2}(u_2 - u_1)(1 - \tanh(x/l_t)) + u_1. \end{cases} \quad (5.10)$$

Pour l'ensemble des simulations, le fond est plat et nous fixons  $h_1 = 1 \text{ m}$ ,  $u_1 = 0$  et  $l_t = 2 \text{ m}$ .  $h_2$  est alors calculé pour chaque  $Fr_1$  à partir de la relation (5.3). Les relations (5.1) et (5.2) permettent alors de déterminer la vitesse  $u_2$  correspondante. Les simulations sont réalisées avec un pas d'espace  $\delta_x = 0.17 \text{ m}$ , et un pas de temps  $\delta_t = 0.027 \text{ s}$ . Les profils spatiaux des ressauts à  $t = 30 \text{ s}$  sont présentés Figures 5.7 et 5.8.

La première transition (ondulé non-déferlant à partiellement déferlant) est prédite par notre modèle pour un nombre de Froude  $Fr_a = 1.40$ . Les ressauts ondulés obtenus pour  $Fr_1 < Fr_a$  sont présentés Figure 5.7. On observe bien que la longueur d'onde des ondulations secondaires diminue lorsque l'on considère des nombres de Froude croissants, alors que leur amplitude augmente.

Les profils des ressauts obtenus à  $t = 30 \text{ s}$  pour des nombres de Froude  $Fr_1 \geq 1.37$  sont montrés Figure 5.8. Pour un nombre de Froude de 1.40, un ressaut ondulé non-déferlant se développe dans un premier temps (non montré). Les ondulations croissent en amplitude, jusqu'à ce que la première vague finisse par déferler. Ceci est en accord avec les résultats expérimentaux de *Favre* (1935), qui avait observé que pour des nombres de Froude proches de la limite  $Fr_a$ , le front commençait à déferler assez tardivement. Le profil résultant de ces transformations est présenté Figure 5.8. Suite au déferlement, le train d'ondes secondaires s'aplatit, ce qui est de manière qualitative en accord avec les observations en laboratoire. La première vague est cependant un peu trop atténuée par rapport aux observations (voir par exemple Figure 5.5c).

Quand on augmente le nombre de Froude, les ondulations secondaires s'atténuent très rapidement. La deuxième transition, correspondant à la disparition des ondulations secondaires, est plus difficile à déterminer. En effet, même pour les nombres de Froude les plus importants (par exemple  $Fr_1 = 1.9$ ), des oscillations irrégulières de faible amplitude sont présentes derrière le front. Des études complémentaires sont nécessaires pour en déterminer l'origine, mais elles sont probablement le résultat d'artefacts numériques. Il est intéressant de noter que le problème de la détermination de  $Fr_b$  n'est pas propre à l'étude numérique. En effet, comme l'illustre la Figure 5.5d, la surface du ressaut dans le cas totalement déferlé est couverte d'irrégularités, rendant difficile la distinction entre un ressaut ondulé déferlé proche de  $Fr_b$  (ondulations d'amplitudes très faibles) et ressauts purement déferlés. On estime que pour nos simulations  $Fr_b \approx 1.50$ .

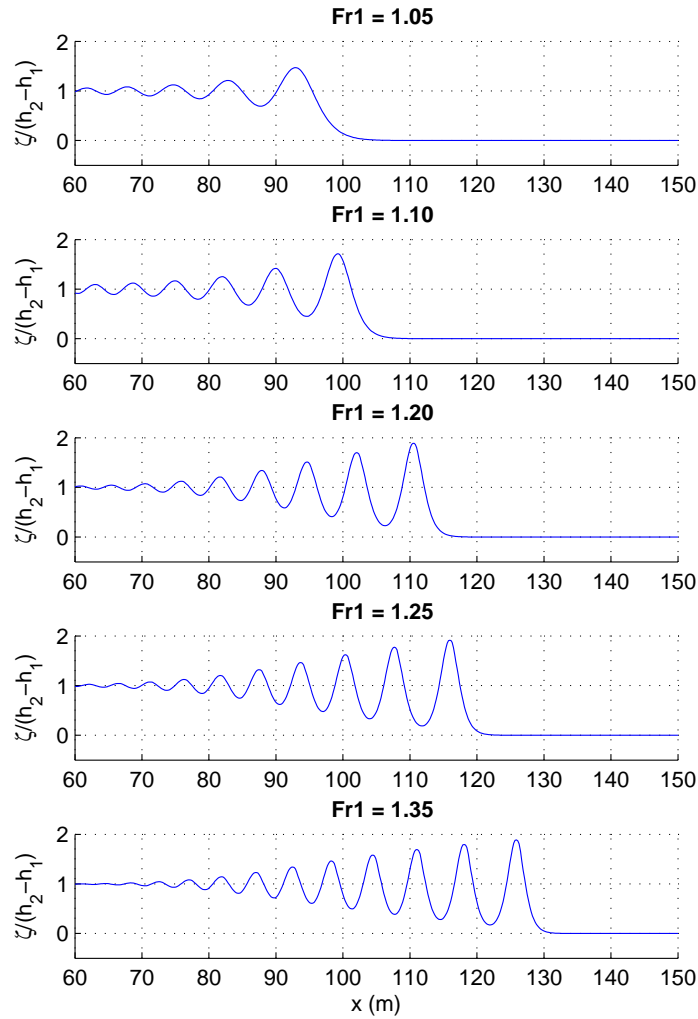


FIGURE 5.7 – Elévation normalisée de la surface libre  $\zeta/(h_2 - h_1)$  à l'instant  $t = 30$  s pour des ressauts hydrauliques tels que  $1.05 < Fr_1 < 1.35$

Finalement, les trois types de ressauts sont qualitativement bien reproduits par notre modèle S-GN. De plus, la transition d'un type de ressaut à l'autre a lieu à des valeurs du nombre de Froude ( $Fr_a = 1.40$  et  $Fr_b \approx 1.50$ ) proches de celles généralement rencontrées dans les expériences en laboratoire (voir §5.2.1). A notre connaissance, notre modèle est le premier modèle de type Boussinesq capable de reproduire la dynamique des ressauts sur une large gamme de nombres de Froude. La valeur de  $Fr_a$  est cependant légèrement supérieure à la valeur expérimentale tandis que l'écart entre les deux transitions est un peu trop faible. Ce dernier aspect sera discuté plus en détail dans la partie suivante.

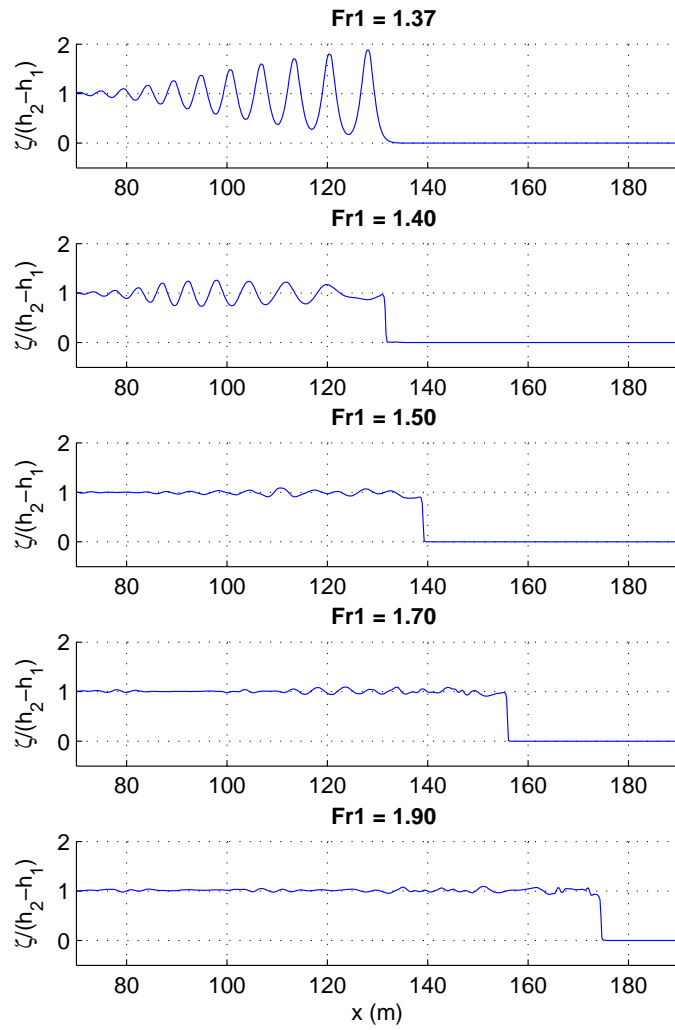


FIGURE 5.8 – Elévation normalisée de la surface libre  $\zeta/(h_2 - h_1)$  à l’instant  $t = 30$  s pour des ressauts hydrauliques tels que  $1.37 < Fr_1 < 1.90$

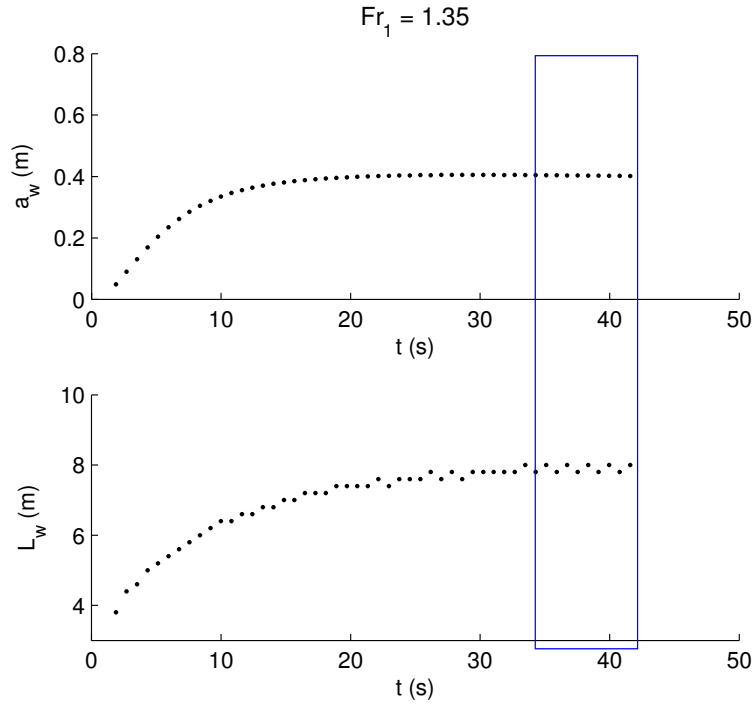


FIGURE 5.9 – Evolution de  $L_w$  et  $a_w$  en fonction du temps à partir du ressaut défini à  $t = 0$  par (5.10) pour  $Fr_1 = 1.35$ .

### 5.3.3 Caractérisation des ressauts

Avant de comparer les prédictions du modèle et les données expérimentales ou théoriques, il est nécessaire d'atteindre un état "développé" du ressaut. Nous définissons celui-ci comme l'état du ressaut pour lequel l'amplitude  $a_w$  et la longueur d'onde  $L_w$  de la première ondulation deviennent approximativement constants (cf. Figure 5.9), même si le train d'ondulations continue à s'allonger dans le temps. Ceci est probablement dû à l'absence d'effets visqueux, qui empêche le ressaut d'arriver à un réel état d'équilibre (*El et al.*, 2006).

Nous calculons ensuite, pour chaque ressaut, l'élévation et la position de la première crête et du premier creux (cf. définitions Figure 5.10, partie supérieure), et donc son amplitude  $a_w$  et sa longueur d'onde  $L_w$ .  $L_w$  et  $a_w$  sont définies Figure 5.3 pour les ressauts non-déferlants. Pour les cas déferlants, on considère des valeurs moyennées sur les premières ondulations.

Ces résultats sont alors comparés aux données expérimentales de *Favre* (1935) et de *Treske* (1994). Parmi ces données, nous ne sélectionnons que celles correspondant à des conditions expérimentales proches de nos simulations, c'est-à-dire la propagation d'ondes positives en translation (*positive surges*) dans un canal à section rectangulaire initialement au repos ( $u_1 = 0$ ).

La Figure 5.10 présente l'évolution de l'élévation de la première crête et du premier creux en fonction du nombre de Froude pour  $Fr_1 \leq 1.4$ . L'accord entre données expéri-

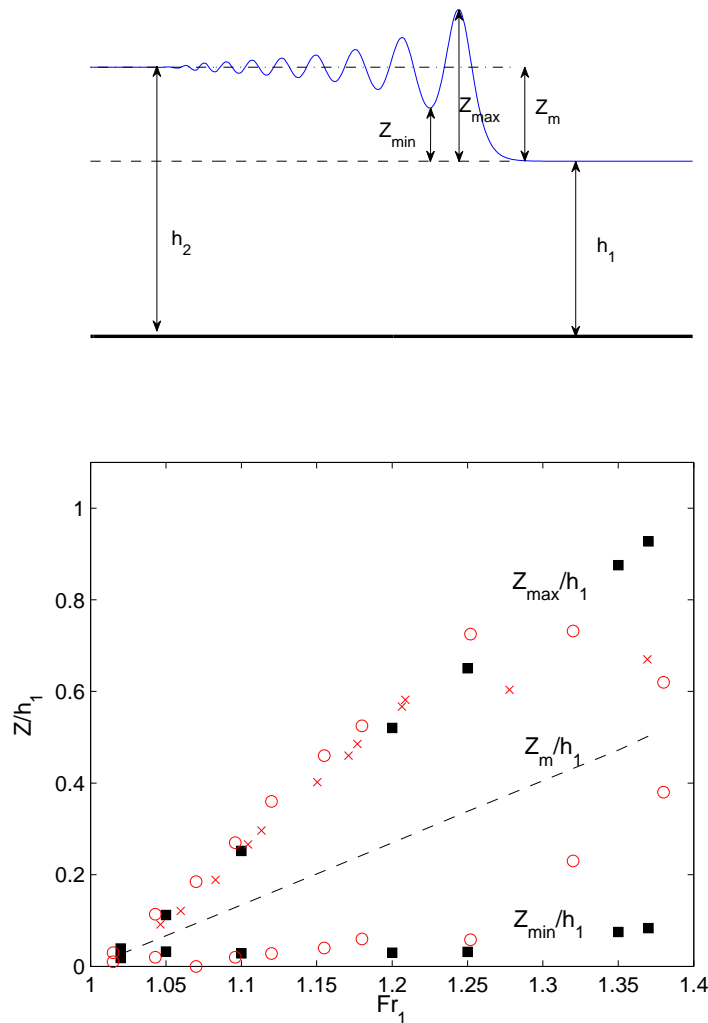


FIGURE 5.10 –  $Z_{\max}/h_1$ ,  $Z_m/h_1$ ,  $Z_{\min}/h_1$  en fonction de  $Fr_1$ . (■) : Prédiction du modèle S-GN. (○) : Données expérimentales estimées à partir du papier de *Treske* (1994) pour le canal à section rectangulaire. (×) : Données expérimentales de *Favre* (1935).

mentales et numériques est très bon jusqu'à  $Fr_1 \approx 1.2$  pour les données de *Favre* (1935), et  $Fr_1 \approx 1.3$  pour les données de *Treske* (1994). Ces valeurs correspondent aux nombres de Froude pour lesquels la transition vers le ressaut déferlant s'amorce ( $Fr_1 \approx Fr_a^{exp}$ ) dans ces deux expériences de laboratoire.

Les figures 5.11 et 5.12 présentent les variations de l'amplitude, de la longueur d'onde, ainsi que de la cambrure des ondulations pour l'ensemble des ressauts ondulés, déferlants ou non ( $Fr_1 \leq Fr_b$ ).

Avant déferlement, l'amplitude prédite par le modèle est en très bon accord avec les données expérimentales, et suit globalement la tendance donnée par la courbe de Lemoine (Figure 5.11a). Comme nous l'avons souligné précédemment, la transition vers un ressaut déferlé commence pour des nombres de Froude plus grands que ce qui est

observé expérimentalement ( $Fr_a^{model} > Fr_a^{exp}$ ), et donc l'amplitude commence à décroître plus tardivement. La décroissance de l'amplitude est de plus bien plus rapide que celle observée expérimentalement lors de l'initiation du déferlement. Ceci est probablement dû au fait que pour notre modèle de déferlement, le front ne peut pas être à l'équilibre tant qu'il n'est pas saturé. En effet, lorsque le déferlement commence, nous changeons localement de système d'équations. Le front est géré par les équations de SV, ce qui va provoquer son raidissement. Les chocs se forment tout d'abord au point de pente maximale, et commencent à dissiper de l'énergie. Tant que le front est gouverné par les équations de SV, la discontinuité continue à se développer jusqu'à atteindre l'état saturé ( $h_2 - h_1 = H$ ). Le front ne peut donc pas se stabiliser en un état "intermédiaire" de déferlement. L'énergie dissipée est par conséquent trop importante pour des nombres de Froude légèrement supérieurs à  $Fr_a$ , provoquant une atténuation excessive de la première vague (cf. Figure 5.8,  $Fr_1 = 1.40$ ), ainsi qu'une diminution plus brutale de l'amplitude des ondulations secondaires par rapport aux expériences de laboratoire. L'accord entre données expérimentales et numériques augmente à nouveau pour des nombres de Froude un peu plus grands, avec en particulier des taux de décroissance de l'amplitude très proches.

La longueur d'onde diminue bien quand  $Fr_1$  augmente (Figure 5.11b), ce qui est en accord avec les études expérimentales. Elle est cependant globalement surestimée par le modèle, mis à part pour les nombres de Froude les plus faibles. L'accord entre théorie de Lemoine et prédictions du modèle est en revanche assez bon.

Enfin, la Figure 5.12 donne l'évolution de la cambrure  $a_w/L_w$  en fonction de  $Fr_1$  et peut être comparée qualitativement aux résultats de *Binnie and Orkney* (1955). Dans les deux cas, le maximum de  $a_w/L_w$  est obtenu juste avant le déferlement. Cependant, ce ratio décroît de manière plus brutale qu'il ne l'a été observé expérimentalement, conséquence de la décroissance beaucoup trop rapide de l'amplitude. Ainsi le processus de disparition des ondulations, qui commence à  $Fr_1 = Fr_a$  est trop rapide dans un premier temps, avant de reprendre une tendance proche de celle observée expérimentalement. Cela explique que les deux transitions successives aient lieu pour des nombres de Froude plus proches que dans des cas réels.

#### 5.3.4 Transition spatiale

Dans cette partie, nous nous intéressons aux transformations d'un ressaut ondulé lorsqu'il se propage vers des profondeurs plus faibles. Le cas présent reste assez académique, mais est d'intérêt d'un point de vue de la modélisation des tsunamis puisqu'il a pour objectif de vérifier les capacités de notre modèle à décrire la transition d'un type de ressaut à l'autre lors de la propagation vers la côte. Ces transformations pourront se retrouver dans des cas réels, et modifier l'impact du tsunami sur la côte.

Dans notre première simulation, nous considérons un domaine numérique divisé en

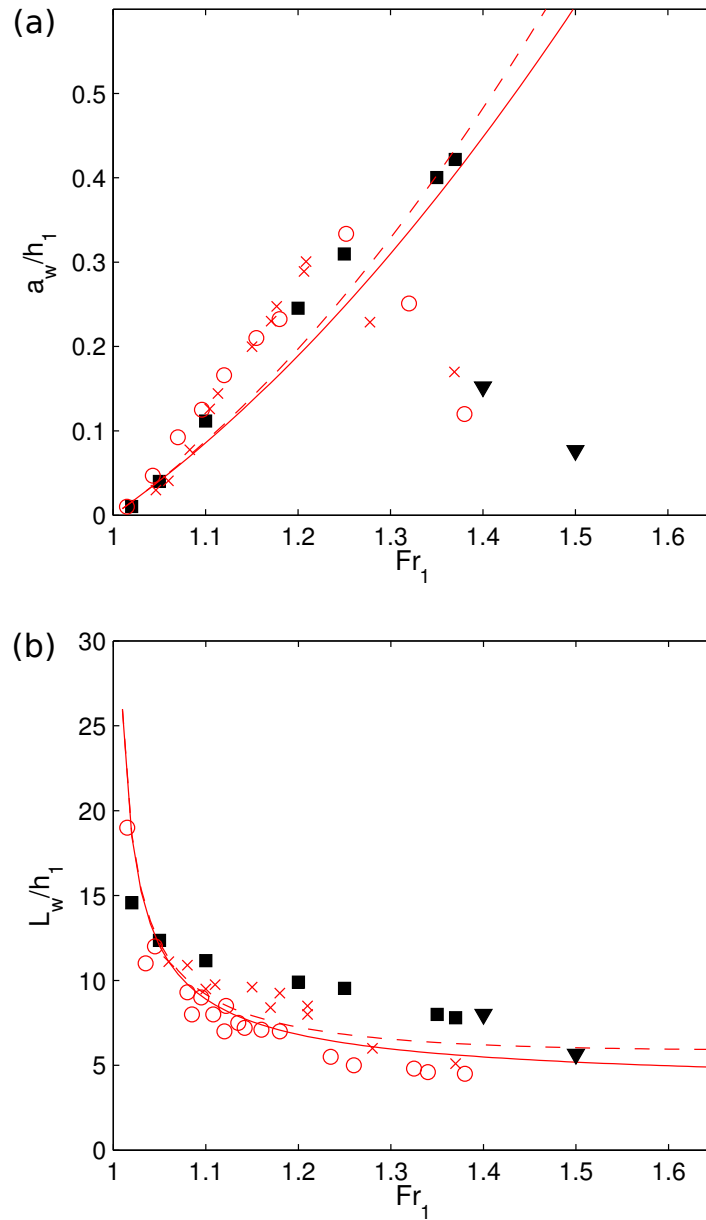


FIGURE 5.11 –  $a_w/h_1$  (en haut) et  $L_w/h_1$  (en bas) en fonction du nombre de Froude  $Fr_1$ . (■) : Prédications du modèle pour les cas non-déferlants. (▼) : Prédications du modèle pour les cas déferlants. (○) : Données expérimentales estimées à partir du papier de *Treske* (1994). (×) : Données de *Favre* (1935). (—) : Théorie "complète" de *Lemoine* (1948). (- -) : Théorie approchée.



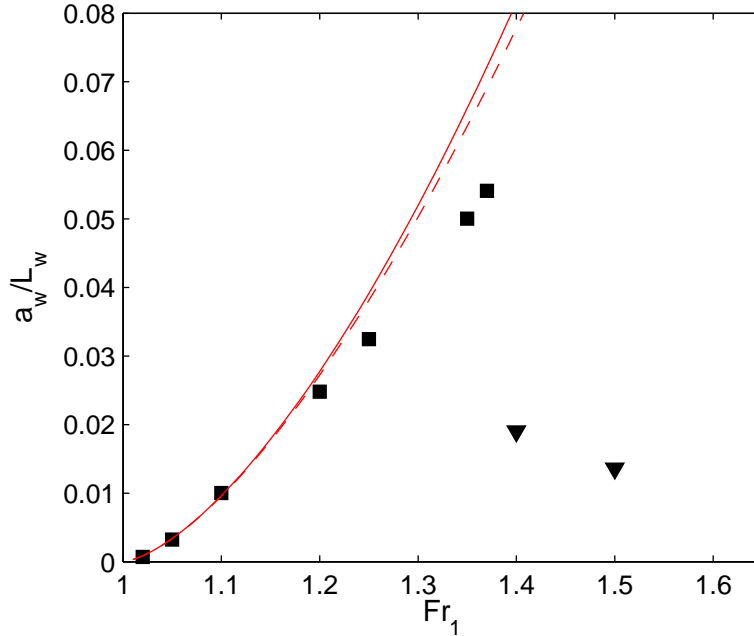


FIGURE 5.12 –  $a_w/L_w$  en fonction du nombre de Froude  $Fr_1$ . (■) : Prédictions du modèle pour les cas non-déferlés. (▼) : Prédictions cas déferlés. (—) : Théorie "complète" de Lemoine (1948). (---) : Théorie approchée.

deux zones principales, A et B, ayant des profondeurs respectives  $d = 1\text{ m}$  et  $d = 0.5\text{ m}$ , avec une transition d'un niveau à l'autre relativement raide (1 : 60) par rapport aux échelles horizontales caractéristiques. Le ressaut se propage tout d'abord dans la zone A, avec un nombre de Froude de  $Fr_1 = 1.35$ , puis va se propager dans la zone B de profondeur deux fois plus faible, résultant en un nombre de Froude de 1.7. Le ressaut devrait donc passer de l'état ondulé à déferlant non-ondulé.

Le ressaut à  $t = 0$  est défini par les relations (5.10) avec  $Fr_1 = 1.35$ . Dans la zone A, il est donc caractérisé par  $h_2^A = 1.47\text{ m}$  et  $h_1^A = 1\text{ m}$ . La Figure 5.13 présente le profil du ressaut à différents instants, avant et après la "marche". Lorsqu'il se propage en zone A, le ressaut développe des ondulations. La première vague commence à déferler lors du passage de la marche. Les ondulations, qui étaient stationnaires lors de la propagation dans la zone A, ne le sont plus lorsque le ressaut arrive dans la zone B. Elles se propagent plus vite que le front et vont s'apparier avec lui. Les différentes vagues secondaires sont alors progressivement "absorbées" par le front principal, ce qui résulte en une diminution de la longueur du train de vagues secondaires. Le ressaut évolue progressivement vers un ressaut purement déferlant. Ce phénomène indique que, dans la zone B, la célérité des ondulations est telle que  $c_\varphi^B > (c_b^B - u_2^B)$ . La relation (5.2) appliquée à  $h_2^B = h_2^A - 0.5$  et  $h_1^B = h_1^A - 0.5$  implique  $(c_b^B - u_2^B) = 1.93\text{ m/s}$ . En faisant l'hypothèse que juste après la diminution de la profondeur d'eau, la longueur d'onde caractéristique des ondulations n'a pas encore eu le temps de changer (i.e.  $L^B = L^A = 6.35\text{ m}$ , calculée d'après (5.8)), on obtient alors  $c_\varphi^B = gL^A/(2\pi) \tanh(2\pi/L^A(h_2^B)) = 2.71\text{ m/s}$ , qui est donc supérieure à

$(c_b^B - u_2^B)$ .

Dans notre deuxième simulation, nous considérons une situation similaire mais avec une pente beaucoup plus douce (1 : 500). L'évolution du ressaut à différents instants est présentée sur la figure 5.14. Dans ce cas également, le modèle réussit à prédire le passage d'un ressaut ondulé à un ressaut purement déferlé, en accord avec l'évolution du nombre de Froude.

### 5.4 Transformations à l'approche du rivage

Nous avons montré que notre modèle S-GN était capable de reproduire les principales caractéristiques des différents ressauts, ainsi que les transformations d'un type de ressaut à un autre. Nous allons maintenant l'appliquer à un cas plus réaliste, et étudier le développement d'ondulations lors de la propagation en eau peu profonde d'un soliton aux caractéristiques proches de celles que pourraient avoir une vague de tsunami. Nous aborderons ensuite les transformations de ce soliton lorsqu'il se propage sur des plages de pentes différentes, ainsi que l'influence du développement des ondulations sur le run-up.

#### 5.4.1 Désintégration du soliton

Afin d'obtenir un soliton ondulé aux caractéristiques qui pourraient être celles d'une vague de tsunami, nous nous basons sur l'étude de *Madsen et al.* (2008). La vague générée à l'entrée du domaine est de la forme  $a_0 \sin^2(2\pi t/T)$  (pour  $t \in [0, T/2]$ ), avec  $a_0 = 2 \text{ m}$  et  $T = 780 \text{ s}$ . Nous considérons l'évolution d'une telle vague lorsqu'elle atteint une région peu profonde de profondeur  $h_0 = 20 \text{ m}$  où les non-linéarités deviennent significatives.

Les profils de la vague à différents instants sont représentés Figure 5.15. Deux simulations sont comparées, la première réalisée avec le code SURF-GN en entier (appelé modèle S-GN par la suite), l'autre avec le même code mais en supprimant les effets dispersifs (modèle SV). On peut distinguer deux phases principales lors de la propagation du soliton. Dans un premier temps, les effets non-linéaires prédominent, provoquant le raidissement de l'onde. Cette première phase est aussi bien décrite par les deux modèles. La vague continue donc de se raidir, jusqu'à atteindre un point où l'hypothèse hydrostatique n'est plus valable. Commence alors la deuxième phase d'évolution du soliton, où prédictions des modèles S-GN et SV diffèrent de plus en plus. En effet, les effets dispersifs entrent en jeu et provoquent le développement d'oscillations à partir des points de courbure maximale, i.e. à partir du front. C'est donc grâce aux effets non-linéaires que les effets dispersifs vont pouvoir prendre de l'importance en eau peu profonde. La simulation SV donne une représentation de la forme "moyennée" du front, dans le sens où elle prédit une évolution similaire, mais sans oscillations. A  $t = 2370.4 \text{ s}$ , le front principal du ressaut décrit par le modèle S-GN a une hauteur 1.5 fois plus importante que celui prédit avec le modèle SV.

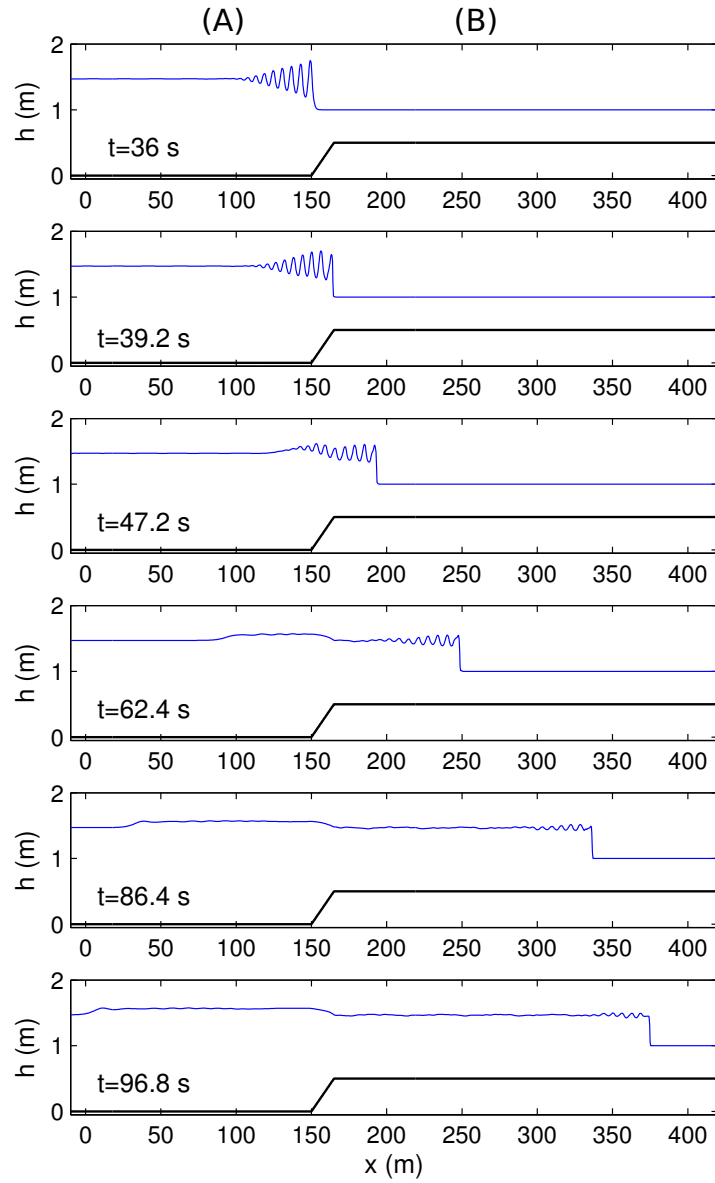


FIGURE 5.13 – Transition de l'état ondulé à l'état déferlant dans le cas d'un changement rapide de bathymétrie (pente 1:60). Profils des ressauts à différents instants.

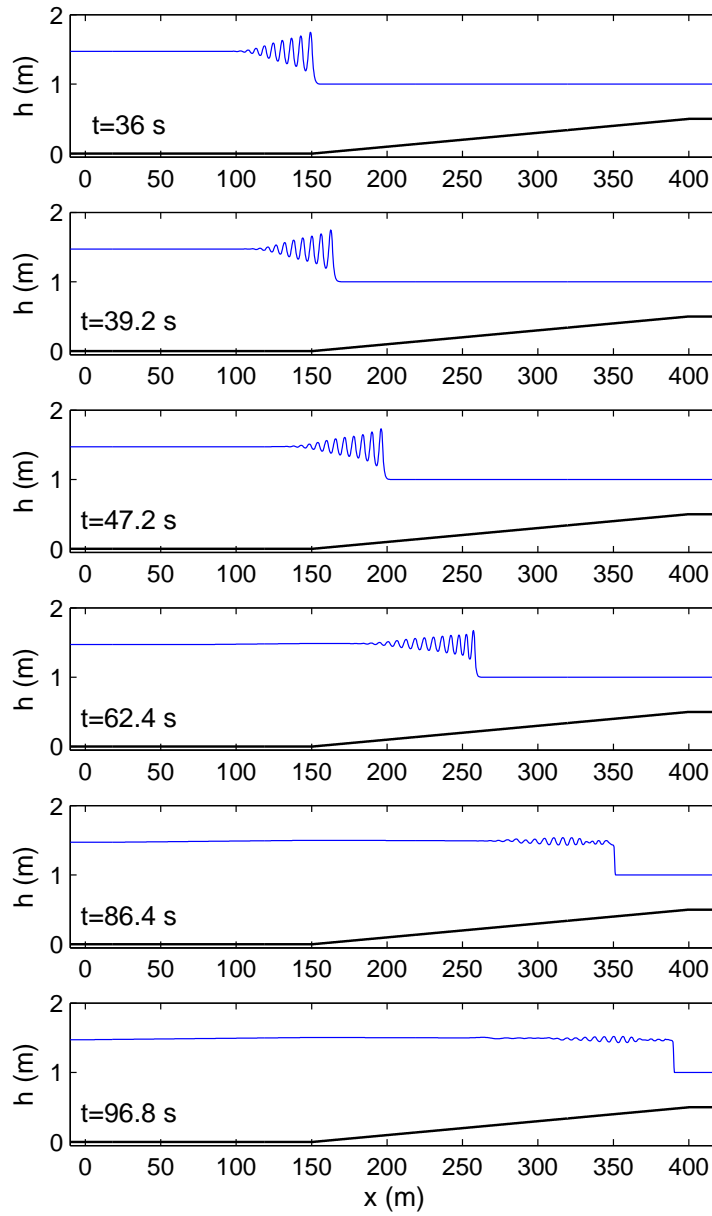


FIGURE 5.14 – Transition de l'état ondulé à l'état déferlant pour un changement progressif de bathymétrie (pente 1 :500). Profils des ressauts à différents instants.

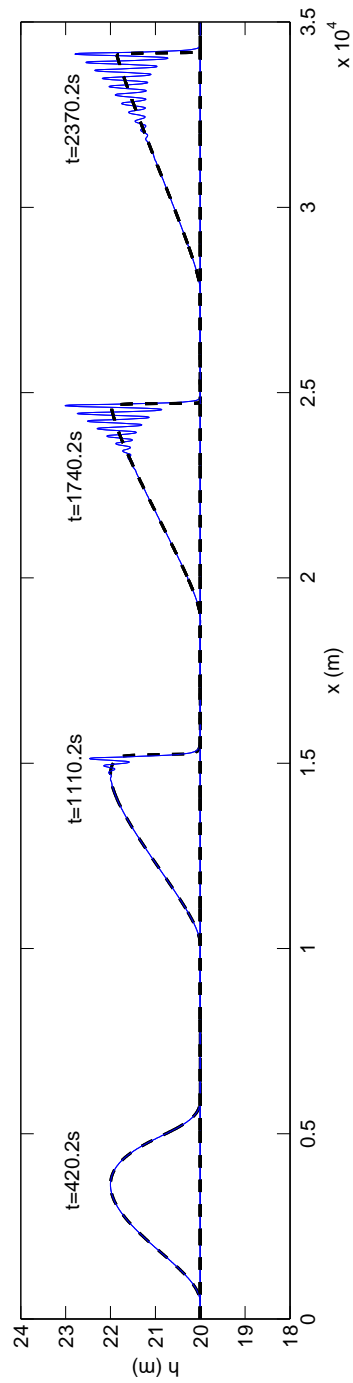


FIGURE 5.15 – Désintégration du soliton d'amplitude  $a_0 = 2\text{ m}$ , et de période  $T = 780\text{ s}$  lors de sa propagation sur un fond plat de profondeur  $h_0 = 20\text{ m}$ . (—) : Modèle S-GN. (- -) : Modèle SV.

Si on laissait ce soliton se propager suffisamment longtemps, ses différentes ondulations finiraient par se décomposer en une série d'ondes solitaires. Cependant, *Madsen et al.* (2008) ont récemment montré que la distance à parcourir en eau peu profonde avant qu'un tsunami aux caractéristiques réalistes ne se désintègre en une série d'ondes solitaires était égale à environ 4 fois la largeur typique du plateau continental. Il en déduit que ce phénomène n'arrivera probablement jamais dans le monde réel. On ne considèrera donc pas le cas de désintégration totale du tsunami dans le cadre de notre étude. Dans la partie suivante, nous étudierons les transformations sur des plages à pente constante du soliton obtenu après 2370.4 s de propagation (voir Figure 5.15).

### 5.4.2 Transformation sur la plage

Deux plages différentes sont considérées, de pentes 1:20 et 1:60. L'objectif étant d'évaluer l'importance du développement des ondulations sur le run-up, nous effectuons cette fois-ci encore deux simulations, avec et sans effets dispersifs.

Les transformations du soliton sont illustrées Figure 5.16 pour la plage de pente 1:60, et Figure 5.17 pour la plage de pente 1:20. Juste avant le déferlement de la première vague, la hauteur prédite par le modèle S-GN est 2.3 fois plus grande que celle prédite par le modèle SV pour la pente 1:60 (Figure 5.16,  $t = 124.25$  s), et environ 1.9 fois pour la plage 1:20 (Figure 5.17,  $t = 81.2$  s). Cette différence importante en terme de hauteur de vague incidente va probablement modifier l'impact du tsunami sur les ouvrages côtiers. On peut également imaginer que cette différence de hauteur incidente aura des conséquences importantes en terme de franchissement d'ouvrages (*overtopping*). A ce stade de la transformation, on observe un décalage assez important entre les vagues prédites par les modèles S-GN et SV. Ce décalage est la conséquence de l'augmentation de la hauteur de la première vague du ressaut ondulé pendant la phase de levée, responsable d'une augmentation de sa célérité. Les ressauts ondulés arrivent donc sur la plage avant ceux prédits par le modèle SV.

La Figure 5.18 présente l'évolution temporelle de la ligne d'eau pour les deux types de plages, avec ou sans prise en compte des effets dispersifs. Cette figure montre tout d'abord que les caractéristiques principales de l'évolution de la ligne d'eau sont assez bien décrites par le modèle SV seulement. Cela confirme ce qu'avait supposé *Madsen et al.* (2008), c'est-à-dire que l'influence du développement des ondulations sur le run-up a été souvent surestimée (par exemple dans *Grue et al.* (2008)). En effet, c'est la vague principale de tsunami, de très longue longueur d'onde, qui va déterminer principalement le run-up, et non les vagues courtes se développant à sa surface.

Le run-up maximal est cependant sous-estimé d'environ 10% lorsque l'on néglige les termes dispersifs, et cela pour les deux pentes de plages. De plus, l'influence des ondes secondaires sur l'évolution de la ligne d'eau ne sera pas la même suivant la pente de la plage.

Dans le cas de la plage à pente faible, la première vague commence à déferler assez loin de la ligne d'eau. Les ondulations secondaires les plus significatives en terme d'amplitude déferlent également avant leur arrivée sur la plage, dissipant une part importante de leur énergie. En conséquence, seule la première phase de run-up/run-down et dans une moindre mesure la seconde diffèrent de manière significative entre les simulations SV et S-GN. Ceci est différent dans le cas 1:20, où la première vague ne déferle que très près du bord, tandis que les suivantes n'ont pas ou peu déferlé. Les ondulations secondaires sont toujours énergétiques lorsqu'elles arrivent sur la plage, et vont influencer les mouvements de la ligne d'eau. Plusieurs phases consécutives de run-up/run-down dues à l'arrivée sur la plage des ondulations secondaires sont observées après la première phase due au front principal, et se superposent en quelque sorte au run-up prédit par la simulation SV.

## 5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la modélisation des transformations des fronts d'ondes longues de type tsunami en zone littorale. Ceux-ci peuvent évoluer vers une large gamme de formes, allant de ressauts ondulés non-déferlants à purement déferlants non-ondulés. La modélisation de ces transformations représente un challenge important pour les modèles de type Boussinesq, puisque qu'elles résultent de l'équilibre complexe entre effets dispersifs, effets non-linéaires et dissipation d'énergie due au déferlement.

Afin de valider notre modèle, nous avons dans un premier temps considéré un cas assez académique, celui de la transformation des fronts de ressauts hydrauliques sur fond plat. Il est bien connu que dans ce cas-là, la dynamique du ressaut est contrôlée par son nombre de Froude. Les trois types principaux de ressauts observés expérimentalement pour des nombres de Froude croissants ont pu être simulés numériquement. Nos simulations ont en effet permis de reproduire des ressauts ondulés sans déferlement, des ressauts ondulés déferlants, et enfin des ressauts purement déferlants sans ondulations, pour des nombres de Froude proches des valeurs expérimentales. Il est important de souligner que les ressauts correspondant à des nombres de Froude importants sont traditionnellement décrits à l'aide de modèles de type SV, tandis que les ressauts correspondant à de faibles nombres de Froude sont décrits par des modèles de type Boussinesq. Notre modèle est donc, à notre connaissance, l'un des premiers modèles moyenné sur la verticale à pouvoir décrire la dynamique des ressauts sur une large gamme de Froude. Ce résultat met en avant une qualité importante de notre modèle de déferlement, à savoir sa simplicité, qui permet la description de fronts déferlés de type ressauts hydrauliques de la même façon qu'il traite des vagues classiques en zone de surf.

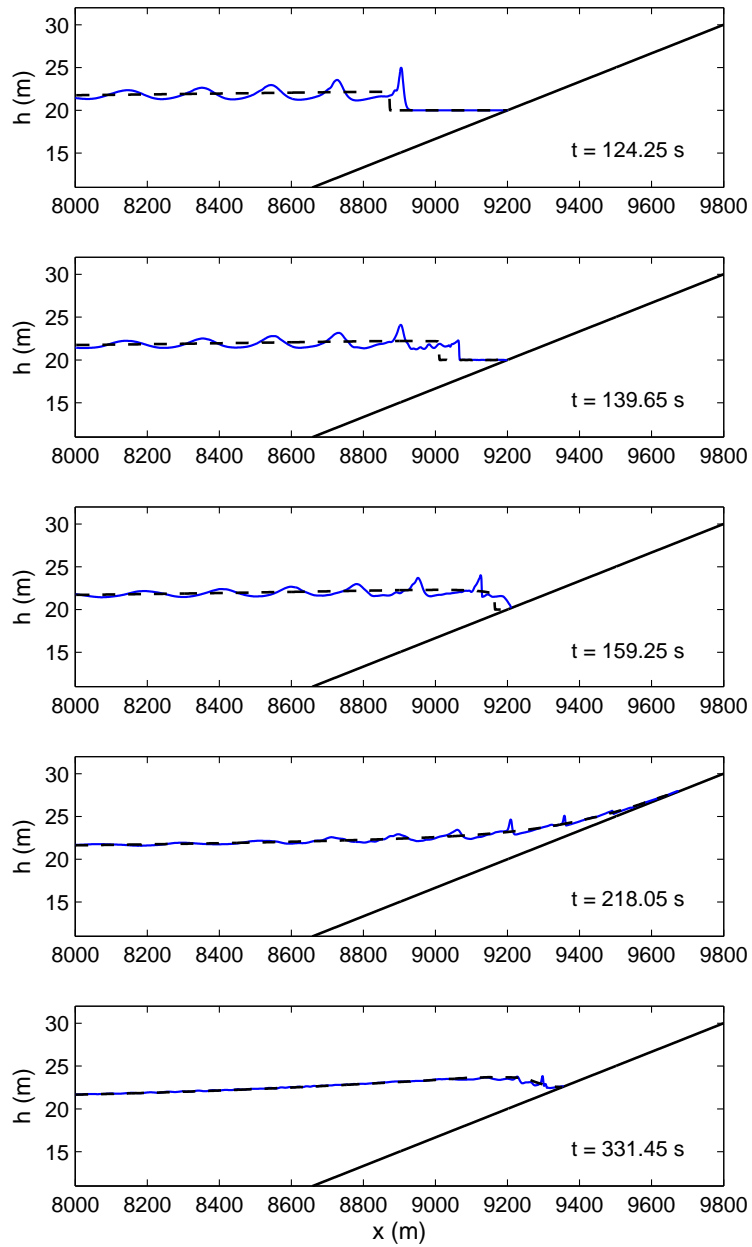


FIGURE 5.16 – Propagation du ressaut ondulé sur une plage de pente 1:60. (—) : Modèle S-GN. (- - -) : Modèle SV.



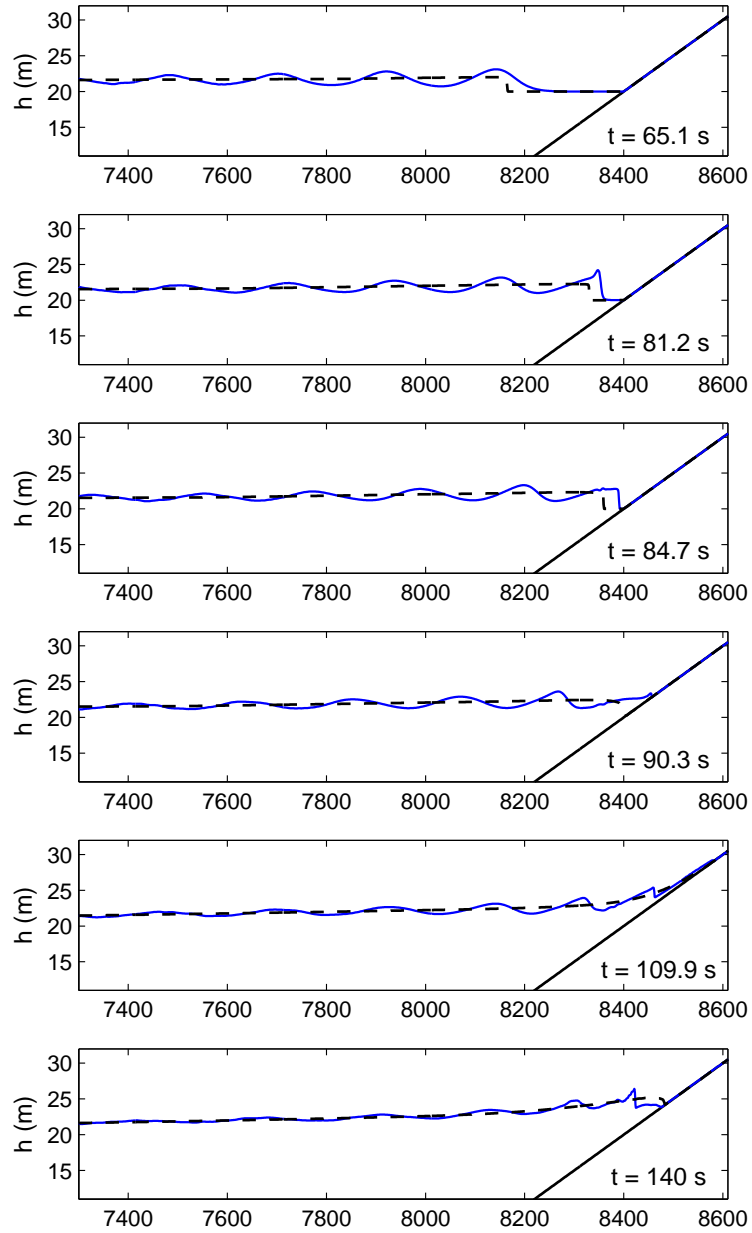


FIGURE 5.17 – Propagation du ressaut ondulé sur une plage de pente 1:20. (—) : Modèle S-GN. (- - -) : Modèle SV.

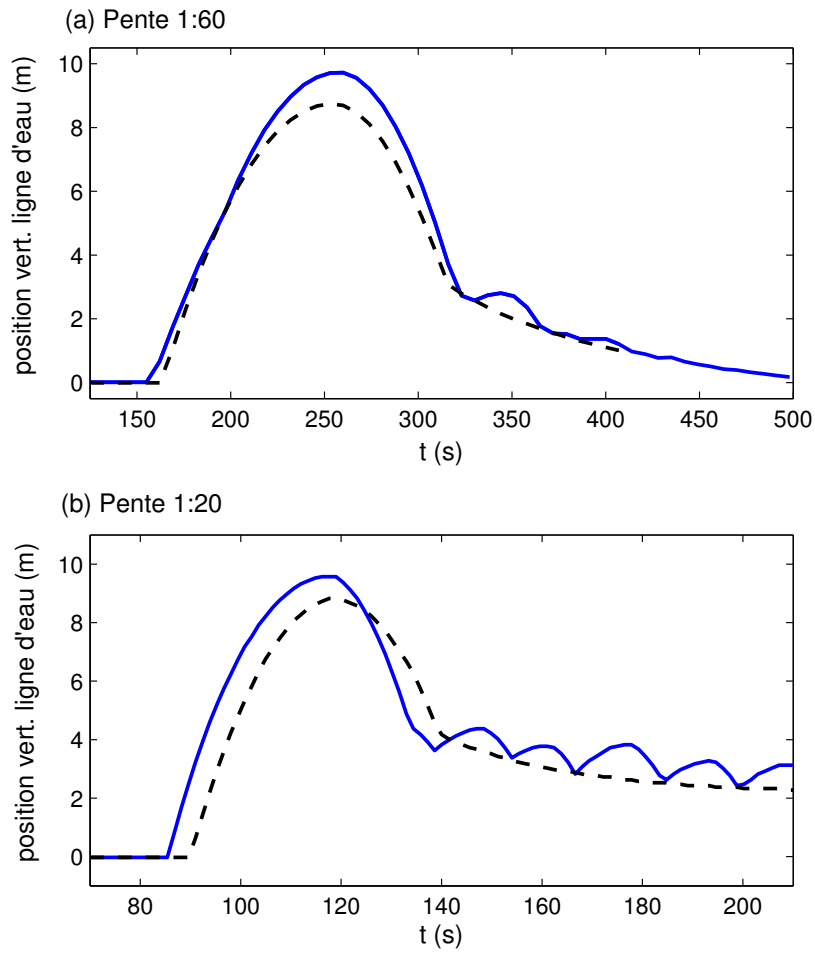


FIGURE 5.18 – Run-up en fonction du temps du ressaut ondulé se propageant sur une plage de pente 1:60 (figure du haut), sur une plage de pente 1:20 (figure du bas). (—) : Modèle S-GN. (- - -) : Modèle SV.

Nous avons ensuite étudié de manière quantitative les caractéristiques des ondu-  
lations secondaires pour des nombres de Froude croissants. L'amplitude et la longueur  
d'onde des onduations ont été comparées aux données expérimentales en canal sur fond  
plat de *Favre* (1935) et *Treske* (1994). L'accord est assez bon de manière générale, en  
particulier en terme d'amplitude. Les différences les plus importantes sont obtenues à  
l'approche de la transition de l'état purement ondulé à l'état déferlé ondulé ( $Fr_a \approx 1.3$ ).  
Le déferlement débutant pour un nombre de Froude plus élevé que ce qui est observé  
expérimentalement, la décroissance des onduations secondaires s'amorce un peu plus  
tard. De plus, le modèle de déferlement semble dissiper un peu trop d'énergie dans les  
premières phases de la transition. En conséquence, la décroissance des oscillations sec-  
ondaires est plus brutale que ce qui est observé expérimentalement pour  $Fr_1 \gtrsim Fr_a$ , mais  
rejoint rapidement la tendance des données expérimentales pour des nombres de Froude  
un peu plus grands. Concernant la longueur d'onde, celle-ci est légèrement surestimée  
par notre modèle pour l'ensemble des simulations, mais suit globalement les mêmes ten-  
dances.

Après cette première phase de validation du modèle, nous avons étudié l'évolution  
d'une onde longue de type tsunami vers un ressaut ondulé en milieu peu profond puis  
sa transformation sur une plage de pente constante. Afin d'évaluer l'importance de la  
formation du train d'ondulations secondaires sur la dynamique de l'onde longue, en par-  
ticulier en terme de run-up, nous avons réalisé une simulation de référence sans termes  
dispersifs, c'est-à-dire avec la partie SV du modèle seulement. La vague ondulée a été  
tout d'abord formée de manière similaire à celle de *Madsen et al.* (2008), c'est-à-dire  
en laissant se propager une onde longue de hauteur  $H/h_0 = 1/10$  sur un fond plat. Au  
début de la simulation, le même type d'évolution est prédit par les modèles S-GN et  
SV (code SURF-GN avec et sans effets dispersifs). L'onde se raidit progressivement. La  
pente du front finit par être telle que l'accélération verticale ne peut plus être négligée.  
Les effets non-hydrostatiques deviennent alors significatifs : des ondulations se dévelop-  
pent à partir du front gouverné par les équations de S-GN, tandis que le raidissement  
se poursuit pour le front gouverné par les équations de SV. Nous considérons ensuite  
les transformations de ce train d'ondulations lors de la propagation de l'onde longue sur  
deux plages de pentes différentes, 1:20 et 1:60. La hauteur maximale du front prédite  
par la simulation dispersive dépasse largement celle prédite par la partie SV du code  
seulement, avec un rapport  $\zeta_{max}^{SGN} / \zeta_{max}^{SV}$  pouvant excéder 2. On peut imaginer par exem-  
ple qu'une telle amplification induira un overtopping beaucoup plus important en cas  
de présence d'ouvrage par exemple. Malgré les caractéristiques très différentes du front  
incident, l'évolution globale de la ligne d'eau est assez bien reproduite par la partie SV  
du code seulement, et cela quel que soit le type de plage considéré. C'est donc l'onde  
longue, la plus énergétique, qui détermine principalement le run-up, et non les ondu-

## 5 - Dynamique des ondes longues de type tsunami en zone littorale

---

tions courtes qui se propagent à sa surface. La simulation SV sous-estime néanmoins le run-up d'environ 10 %, et cela pour les deux types de plages. Un décalage temporel est de plus observé entre l'arrivée des deux ondes sur la plage. Si l'on regarde de manière plus détaillée les mouvements de la ligne d'eau, on observe que les ondes secondaires viennent en quelque sorte s'ajouter à l'évolution décrite par le code SV. Dans le cas de la pente la plus faible (1:60), les ondulations secondaires vont déferler avant d'arriver sur la plage : leur influence sera réduite. Les prévisions du code SURF-GN avec et sans les effets dispersifs convergent assez rapidement. Les écarts sont bien plus importants pour la plage de pente 1 : 20.

D'une manière générale, cette étude confirme l'importance de la prise en compte des effets dispersifs pour la description de la transformation des vagues de tsunami en eau peu profonde. L'utilisation d'un modèle de type Boussinesq fortement non-linéaire est à la fois nécessaire pour obtenir une bonne estimation de la hauteur du front incident, et donc de l'impact sur les structures, et pour décrire précisément les mouvements de la ligne d'eau.

# Chapitre 6

## Célérité des vagues en zone de surf

### 6.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons présenté un nouveau modèle numérique permettant une description simple et efficace des vagues en zone de surf. Dans ce chapitre, nous présenterons une étude principalement expérimentale de la dynamique des vagues déferlées, basée sur l'analyse d'un jeu de données in-situ unique acquis pendant la campagne de mesure ECORS Truc-Vert 2008. Nous nous focaliserons plus précisément sur l'étude de la célérité des fronts déferlés. Dans la partie 6.2, nous introduirons les enjeux scientifiques de cette étude, et présenterons les principaux estimateurs de célérité existants. Dans la partie 6.3, constituée d'un article publié à *European Journal of Mechanics, B/ Fluids*, nous introduirons notre jeu de données et le traitement effectué pour en extraire la célérité. Nous analyserons ensuite l'influence des non-linéarités sur la dynamique des fronts déferlés. Dans ce chapitre, les non-linéarités seront caractérisées par le paramètre  $\gamma = H/h_0 = 2\epsilon$ . Les performances de différents estimateurs de célérité seront ensuite évaluées. Enfin, la partie 6.4 conclura cette étude et présentera quelques pistes pour analyser plus en détail la dynamique de la célérité en zone de surf.

### 6.2 Contexte scientifique

#### 6.2.1 Phénoménologie

La célérité des vagues déferlées,  $c_b$ , est un paramètre clé pour différents modèles de vagues en zone littorale. Dans les modèles couplés houle/courant à phase moyennée par exemple, les flux de masse, les flux d'énergie et la dissipation dépendent de ce paramètre. Pour de nombreux modèles de type Boussinesq, la paramétrisation du déferlement requiert également une estimation de  $c_b$  (voir par exemple *Schäffer et al.*, 1993; *Madsen et al.*, 1997; *Cienfuegos et al.*, 2010). Des théories développées pour les vagues non-déferlées, telles que la théorie linéaire en eau peu profonde, sont souvent utilisées dans les modèles. L'étude de la célérité des vagues en zone de surf est également primor-

diale pour le développement des méthodes d'inversion bathymétrique à partir d'imagerie vidéo (*Holland, 2001; Catalán and Haller, 2008; Almar et al., 2008*). L'utilisation de la vidéo permet d'avoir accès aux champs de célérité sur de grandes étendues spatiales et temporelles. Le choix de la relation fonctionnelle entre célérité et profondeur d'eau est alors essentiel pour la détermination de la bathymétrie. La majorité de ces méthodes sont basées sur la relation de dispersion linéaire  $c_\varphi = \left(\frac{g}{k} \tanh(kd)\right)^{1/2}$ , menant à des erreurs sur la détermination de la bathymétrie pouvant atteindre les 50% en zone de surf (*Holland, 2001*).

Il a pourtant été montré depuis longtemps que la théorie linéaire donnait une bonne estimation au premier ordre de l'évolution de  $c_b$ , mais sous-estimait la célérité de manière générale. L'étude de *Thornton and Guza (1982)* a été l'une des premières à mettre en avant le caractère fortement non-linéaire de  $c_b$ . À l'aide de lignes de capteurs de pression synchronisés déployés dans la direction perpendiculaire à la plage, les auteurs calculèrent les spectres de célérité  $c_\varphi(\nu)$  pour différentes profondeurs d'eau, et les comparèrent aux spectres donnés par la théorie linéaire. Leurs résultats sont reproduits Figure 6.1. On observe un bon accord entre spectre de célérité mesuré et prédit par la théorie linéaire pour le capteur le plus au large. Les différences entre mesures et théorie augmentent cependant en eau peu profonde. En particulier, on observe une saturation de la célérité en zone de surf, qui ne semble plus dépendre de la fréquence. La vague déferlée peut donc être caractérisée par une seule célérité (ligne horizontale Fig. 6.1), généralement supérieure à la célérité donnée par la théorie linéaire, et cela quelle que soit la fréquence considérée.

*Stive (1984)* a montré à partir d'expériences sur des vagues périodiques déferlant sur une plage plane que l'écart à la théorie linéaire variait spatialement à l'intérieur même de la zone de surf. Plus précisément, il observa une augmentation de l'écart entre  $c_b$  et  $c_\varphi$  juste après le déferlement puis une diminution progressive de cet écart en zone de surf interne. Ce comportement est illustré Figure 6.2. Elle montre l'évolution de la célérité (données expérimentales et prédictions de SURF-GN) en fonction de la profondeur moyenne,  $\bar{h}$ , pour les expériences de laboratoire de *Stive (1984)*. Au début de la zone de shoaling,  $c_b$  est proche de  $(g\bar{h})^{1/2}$ , mais s'en éloigne à la fin de la phase de levée et en zone de surf externe.  $c_b$  se rapproche ensuite progressivement de la célérité linéaire lorsque la vague progresse dans la zone de surf interne. Cette dynamique peut être également visualisée à l'aide de représentations de type *timestacks*, communément utilisés en analyse vidéo pour déterminer différents proxies tels que la célérité et la quantité de vagues déferlées. Dans le cadre de l'analyse vidéo, ils représentent l'évolution temporelle d'une ligne de pixels dans la direction perpendiculaire à la plage. La Figure 6.3 montre l'équivalent de cette représentation obtenu à partir des sorties de SURF-GN pour les expériences de *Cox (1995)* (houle régulière sur plage à pente constante, cf. §4.2). Cette figure représente l'évolution de profils spatiaux d'élévation de la surface libre en

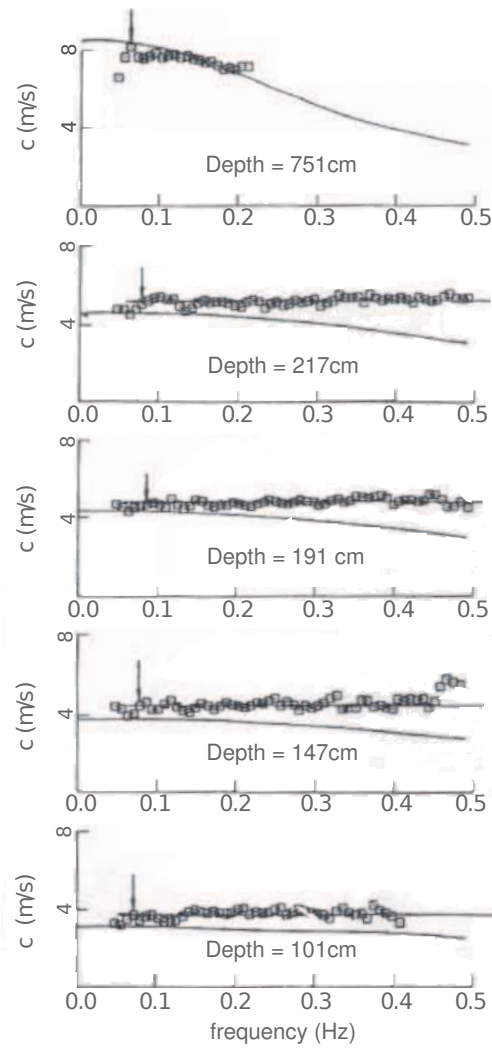


FIGURE 6.1 – Spectres de célérité à différentes profondeurs d'eau le long d'un transect perpendiculaire à la plage. Symboles : mesures in situ. Courbe : théorie linéaire. Ligne horizontale : célérité moyenne. (*Thornton and Guza, 1982*)

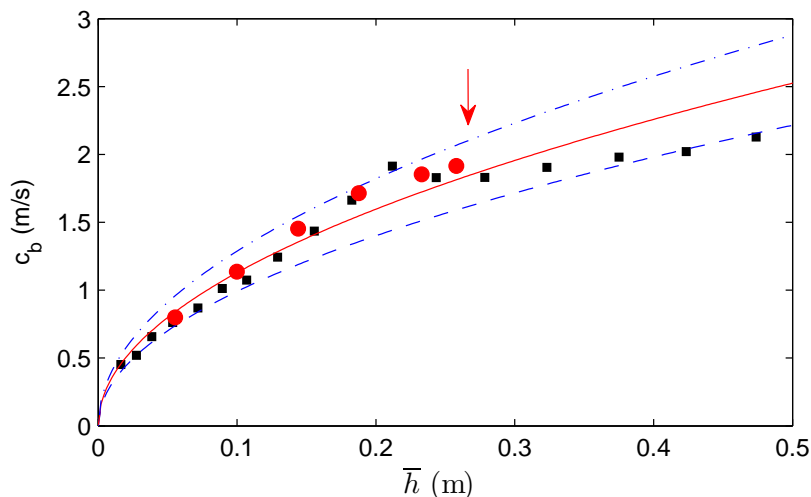


FIGURE 6.2 –  $c_b$  en fonction de  $\bar{h}$  pour les expériences de *Stive* (1984), test 2. (■) : Prédications de SURF-GN. (●) : Données expérimentales. Flèche : position du point de déferlement. (---) :  $(g\bar{h})^{1/2}$ , (-.-) :  $1.3(g\bar{h})^{1/2}$ , (—) :  $1.14(g\bar{h})^{1/2}$ .

fonction du temps. La pente des lignes créées par les successions de crêtes et creux donne la célérité à un instant et une position donnés. La zone noire à droite de l'image correspond à la partie émergée de la plage. Cette figure permet de visualiser le raidissement des vagues en zone de levée (les lignes correspondant aux crêtes deviennent plus fines), puis le déferlement (diminution brutale de l'élévation maximale, mais aussi de l'écart entre crête et creux). On retrouve sur cette figure un changement de pente à proximité du déferlement ( $x_b \approx 13.8 \text{ m}$ ) témoin du changement de célérité observé Figure 6.2. Dans ce cas de houle purement monochromatique, la zone de swash est quasiment inexistante. Celle-ci va être plus développée dans le cas de houles irrégulières, et être le siège d'une dynamique fortement non-linéaire. L'évolution de  $c_b$  pour les plus faibles profondeurs d'eau va alors être affectée.

Les figures 6.4 et 6.5 montrent l'évolution de la célérité pour des ondes bichromatiques se propageant sur une plage à pente 1 :35 (cf. §4.3, expériences de *Van Dongeren et al.*, 2007). La Figure 6.4 permet de visualiser la complexité des phénomènes en jeu. La célérité à une position  $x$  donnée en zone de surf interne (par exemple  $x \approx 31 \text{ m}$ ) varie de manière significative en fonction du temps. Cette variabilité est le résultat du phénomène de dispersion en amplitude (les vagues les plus hautes se propagent plus vite) mais aussi des variations locales de l'élévation du plan d'eau et du champ de vitesse résultant du développement des ondes basse-fréquences. La figure 6.5 présente l'évolution de la célérité moyenne (calculée pour plusieurs groupes de vagues consécutifs à partir de capteurs toujours immergés ( $x < 32.5 \text{ m}$ )) en fonction de  $\bar{h}$ . Contrairement au cas périodique, on observe un écart très important entre célérité moyenne et célérité linéaire à l'approche de la zone de swash. La célérité forme une sorte de plateau pour les plus



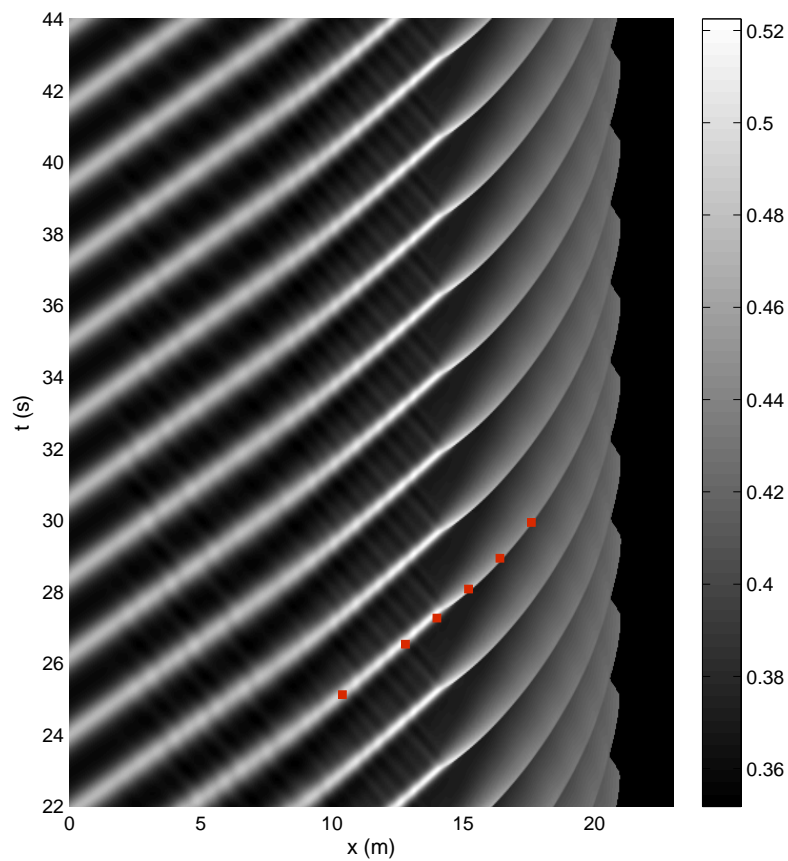


FIGURE 6.3 – Représentation spatio-temporelle de l'évolution des vagues pour une simulation correspondant au cas *Cox* (1995) (calculée par SURF-GN). En noir : partie émergée de la plage. (■) : positions des crêtes déterminées expérimentalement.

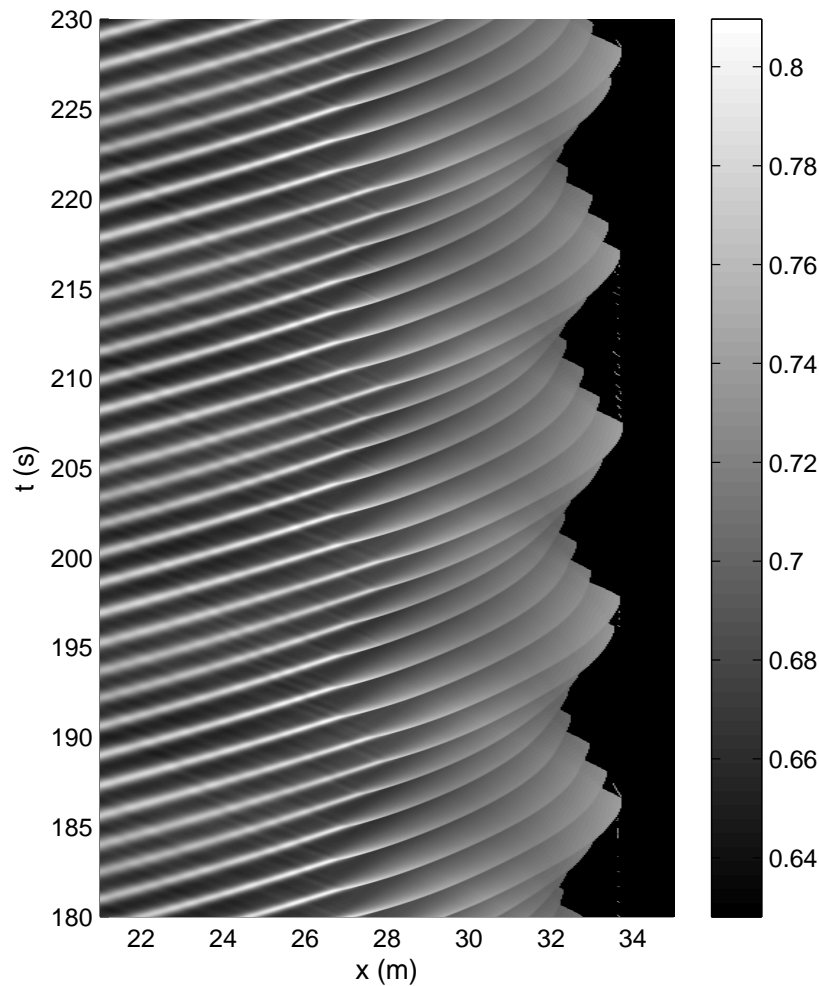


FIGURE 6.4 – Représentation spatio-temporelle de l'évolution des vagues pour une simulation correspondant au cas A-4 de *Van Dongeren et al.* (2007). En noir : partie émergée de la plage (taches claires : petite instabilité numérique au niveau de la ligne d'eau).

faibles profondeurs d'eau, phénomène bien prédit par le modèle S-GN.

Ces différents résultats préliminaires ont permis de mettre en avant la grande variabilité de  $c_b$ , dans des cas pourtant énormément simplifiés par rapport à la réalité. On comprend alors la difficulté de la prédiction de ce paramètre clé pour les modèles de vagues. Afin de compenser la sous-estimation de la célérité par la théorie linéaire, des adaptations empiriques de cette théorie du type  $c_b = 1.3(g\bar{h})^{1/2}$  ont vu le jour, et sont communément utilisées dans les modèles (*Schäffer et al.*, 1993). Les exemples précédents montrent cependant qu'une estimation de la forme  $A(g\bar{h})^{1/2}$  ne pourra donner qu'une estimation très grossière de  $c_b$ . Il a été par exemple montré que l'approximation  $c_b = 1.3(g\bar{h})^{1/2}$  dans la paramétrisation du déferlement de *Schäffer et al.* (1993) permettait d'obtenir des résultats satisfaisants lors de la modélisation de vagues régulières, mais devenait insuffisante lors de l'application du modèle à des vagues irrégulières où

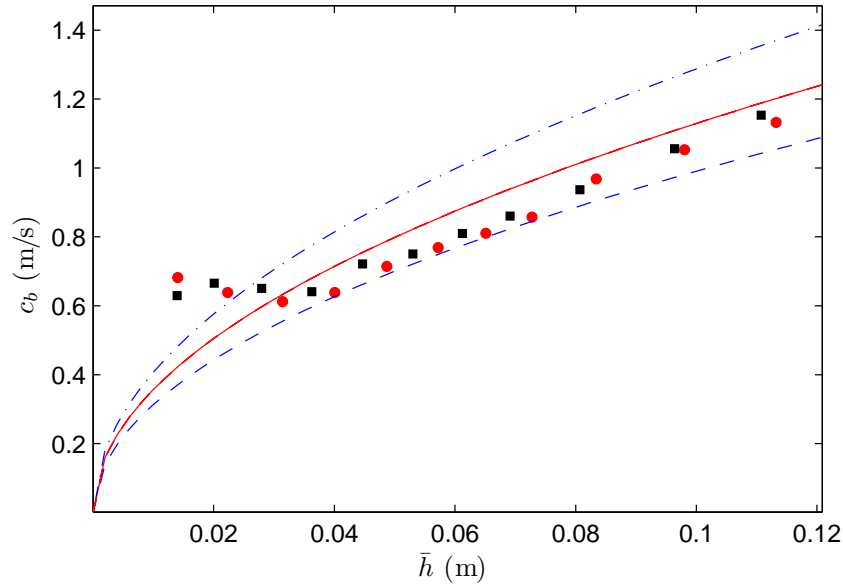


FIGURE 6.5 –  $c_b$  en fonction de  $\bar{h}$  en zone de surf interne pour l'expérience de *Van Dongeren et al.* (2007), cas A-4. (■) : Prédictions du modèle SURF-GN. (●) : Données expérimentales. (---) :  $(g\bar{h})^{1/2}$ , (-.-) :  $1.3(g\bar{h})^{1/2}$ , (—) :  $1.14(g\bar{h})^{1/2}$ .

ondes courtes et longues interagissent (*Madsen et al.*, 1997). La prise en compte des non-linéarités est alors nécessaire pour améliorer l'estimation de la célérité en zone de surf (voir par exemple *Holland*, 2001; *Catalán and Haller*, 2008, pour les applications vidéos).

### 6.2.2 Modélisation de la célérité

L'onde solitaire, solution de forme constante des équations de Boussinesq, est l'un des premiers modèles à prendre en compte les effets de l'amplitude sur la célérité en eau peu profonde. Sa célérité s'exprime de la façon suivante :

$$c_b = \left( g\bar{h} \left( 1 + \frac{H}{\bar{h}} \right) \right)^{1/2}. \quad (6.1)$$

Ce modèle, non développé pour des vagues déferlées, est généralement considéré comme la limite supérieure de la célérité (*Thornton and Guza*, 1982, par exemple). Quelques observations suggèrent cependant qu'elle peut être excédée (*Suhayda et al.*, 1977).

Le modèle non-linéaire pour vagues déferlées le plus classiquement utilisé dans les modèles à phase moyennée a été introduit par *Svendsen et al.* (1978). Il est basé sur l'analogie entre la vague déferlée et le ressaut hydraulique propagatif (Figure 6.6). Le modèle repose sur les hypothèses suivantes : (1) la variabilité verticale du champ de vitesse et les effets hydrostatiques sont négligeables. C'est l'hypothèse de base des équations de SV. (2) le fond est localement horizontal; (3) les vagues déferlées sont

saturées ( $h_2 - h_1 = H$ ); (4) l'écoulement est uniforme à l'aval et l'amont du front; (5) la vague a une forme quasi constante. Les hypothèses (2-5) résultent de l'analogie entre la vague déferlée et le ressaut hydraulique. En utilisant les relations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement au niveau du ressaut ainsi que les hypothèses (1-5), on obtient alors :

$$c_b = \left( \frac{gh_1 h_2}{2\bar{h}^2} (h_1 + h_2)^2 \right)^{1/2}. \quad (6.2)$$

Plus récemment, *Bonneton* (2004) a développé un prédicteur de célérité basé sur la théorie hyperbolique des chocs des équations de SV (cf. partie 2.3.1). Le front déferlé est assimilé à une discontinuité (cf. Schéma 2.5), tandis que les parties régulières de l'écoulement sont gouvernées par les équations de SV (hypothèse (1)). Nous avons montré dans le chapitre 2, §2.5 que les conditions de saut permettaient d'obtenir la relation suivante :

$$c_b - u_1 = \left( \frac{gh_2}{2h_1} (h_2 + h_1) \right)^{1/2}, \quad (6.3)$$

où  $u_1$  est la vitesse moyennée sur la verticale devant le front. Pour des vagues périodiques se propageant sur une plage à pente douce où les phénomènes de réflexion sont négligeables, *Bonneton* (2007) a montré que l'invariant de Riemann  $u_1 - 2(gh_1)^{1/2}$  pouvait être approché par  $\bar{u} - 2(g\bar{h})^{1/2}$ . En négligeant la contribution de  $\bar{u}$ , on obtient alors la formulation de *Bonneton* (2004) :

$$c_b = -2(g\bar{h})^{1/2} + 2(gh_1)^{1/2} + \left( \frac{gh_2}{2h_1} (h_2 + h_1) \right)^{1/2}, \quad (6.4)$$

qui sera appelé modèle des chocs par la suite. Le modèle des bores est également obtenu à partir de la conservation de la quantité de masse et de mouvement au niveau de la discontinuité, exprimée par la relation (6.3). Cependant, les hypothèses faites pour obtenir l'estimateur de célérité final sont moins restrictives dans le cas du modèle des chocs que pour le modèle des bores. En particulier, les hypothèses (2-5) ne sont pas nécessaires.

Le modèle des chocs peut lui-même être vu comme une approximation de la célérité prédite par notre modèle SURF-GN. En effet, lors de la simulation de la propagation de vagues déferlées, le front est localement gouverné par les équations de SV et vérifie donc les conditions de saut. La célérité vérifie donc directement la relation (6.3), sans approximation. L'utilisation de notre modèle numérique pour estimer la célérité permet notamment de s'affranchir de l'hypothèse de champs de vagues quasi-stationnaires, nécessaire aux modèles de bore ou de chocs. Les figures 6.2, 6.3 et 6.5 ont permis de montrer que notre modèle donnait une très bonne estimation de la célérité moyenne des vagues en zone de surf pour des houles mono- et bichromatiques. L'analyse menée dans le chapitre 4 (§4.3.2.1) des processus d'appariement des vagues déferlées semble montrer que notre modèle SURF-GN permet également une bonne estimation de la célérité

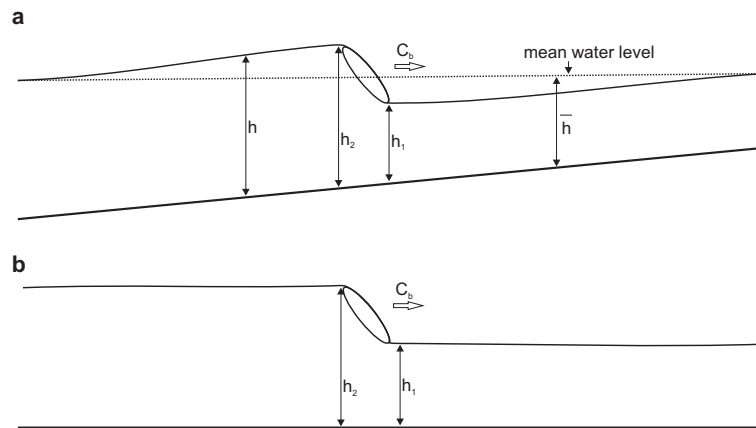


FIGURE 6.6 – Modèle de bore. (a) Vague déferlée. (b) Ressaut hydraulique équivalent. Adaptée de *Bonneton* (2004).

vague-à-vague.

## 6.3 Étude in-situ de la célérité (Article)

Dans la partie 6.2, nous avons montré que l'estimation de la célérité des vagues déferlées était essentielle à une bonne modélisation de la circulation littorale. Or, si la célérité des vagues est relativement bien décrite avant le déferlement, ce n'est pas encore le cas en zone de surf. En particulier, la plupart des estimateurs de célérité existants reposent sur l'hypothèse d'une forme de vague constante ou très lentement variable, alors qu'en zone de surf elle peut évoluer très rapidement. Pourtant, très peu d'études ont été consacrées à l'analyse des performances des différents estimateurs de célérité à l'aide d'expériences en laboratoire (par exemple *Catalán and Haller, 2008*), et encore moins à partir de données in-situ (principalement *Thornton and Guza, 1982*).

L'article présenté dans cette partie, publié dans *European Journal of Mechanics, B/Fluid*, présente une étude de la célérité des vagues en zone de surf basée sur l'analyse de données issues de la campagne de mesure ECORS-Truc Vert 2008. Ce jeu de données inclue une large gamme de conditions de houles incidentes et de hauteurs d'eau, et nous permettra donc de quantifier l'influence de différents paramètres tels que les non-linéarités sur la propagation des fronts d'onde. Nous évaluerons également la pertinence des principaux modèles existants dans des conditions réelles. Enfin, l'influence des variations très basse fréquence de la circulation sur la célérité sera discutée.

### Field measurements and non-linear prediction of wave celerity in the surf zone

M. Tissier<sup>1</sup>, P. Bonneton<sup>1</sup>, R. Almar<sup>1,2</sup>, and B. Castelle<sup>1</sup>, N. Bonneton<sup>1</sup>, A. Nahon<sup>1,3</sup>

#### Abstract

A good prediction of wave celerity in the surf zone is essential for wave propagation modelling in the nearshore. This paper is devoted to a study of wave celerity based on the analysis of data collected during the ECORS 2008 field experiment that took place at Truc Vert Beach, SW France. Here we analyze and quantify the effects of non-linearities and evaluate the predictive ability of several non-linear celerity predictors for high-energy wave conditions. The asymptotic behavior of the different models for high values of the non-linearity parameter is investigated. Besides, comparisons with data show that the classic bore model is inappropriate to describe wave dynamics when approaching the swash zone. The influence of very low frequency pulsations of the wave-induced circulation on wave celerity is also discussed.

#### 6.3.1 Introduction

As waves propagate to shallower water, they become steeper and higher until they break. Broken waves keep propagating shoreward through the surf zone. Immediately after breaking, the wave shape rapidly evolves. Thereafter, waves evolve more slowly as they reorganize into quasi-periodic bore-like waves in the inner surf zone. Very steep fronts are observed, which give to waves a typical saw-tooth profile (cf. Figure 6.7). Waves finally end up in the swash zone where the run-up starts. Thus, waves are increasingly non-linear while they propagate shoreward. This high complexity explains why some basic wave parameters, such as wave celerity, are still not accurately described inside the surf zone.

---

1. Université Bordeaux 1 ; CNRS ; UMR 5805-EPOC, Talence, F-33405, France.

2. Now at College of Engineering, Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile

2. Now at LNEC, DHA-NEC, Av. do Brasil, 101 - Lisbon, Portugal

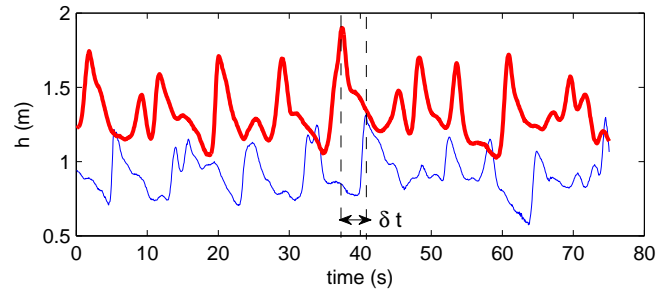


FIGURE 6.7 – Example of time-series of water depths at two synchronized pressure sensors (the offshore sensor is the thick line).

A good prediction of broken wave celerity,  $c_b$ , is essential, as it is a key parameter in nearshore wave propagation models. In phase-averaged wave propagation models, mass flux, energy flux and wave dissipation depend on  $c_b$ . The celerity predictors used in these models rely on the assumption of a given (fixed) wave shape, or at least a slowly variable one, whereas in the surf zone the wave shape can evolve quickly. For instance, broken wave celerity is often predicted using the linear shallow water theory, with the phase speed  $c_\varphi \approx (gd)^{1/2}$  (where  $d$  is the local water depth), or the classic non-linear bore model (Svendsen *et al.*, 1978). In time dependent Boussinesq-type models, a parametrization of  $c_b$  is also generally required : rough approximations such as  $c_b = 1.3(gd)^{1/2}$  are often used (see Schäffer *et al.*, 1993). In-situ study of wave celerity is also important for the development of remote sensing techniques (see for instance Holland, 2001; Catalán and Haller, 2008; Almar *et al.*, 2008). For example, wave celerity can be computed over a large area from video imaging and, subsequently the bathymetry and its evolution can be estimated through depth-inversion techniques. The accuracy of the results is directly dependent on the knowledge of a good functional relationship between wave celerity and water depth. This accuracy has been found to significantly degrade in the surf zone. Most of depth inversion techniques rely on the linear dispersion relation  $c_\varphi = \left(\frac{g}{k} \tanh(kd)\right)^{1/2}$ . Holland (2001) investigated the validity of this dispersion relation for depth inversion. Using field data, he showed that the linear dispersion relation was commonly leading to depth errors of over 50% inside the surf zone, whereas the average depth estimation error was of 3 – 9% outside of the surf zone.

Despite a clear need of validation of the different celerity predictors, only scarce works have been devoted to the experimental study of wave celerity. Catalán and Haller (2008) compared the predictions of several linear and non-linear models with laboratory data, in application to depth inversion. Concerning field data, a key study was performed by Thornton and Guza (1982). Using a shore-normal transect of pressure and current sensors, they computed celerity spectra,  $c_\varphi(\nu)$ , from pairs of adjacent sensors, for  $d < 7$  m. They observed that the celerities were almost invariant with frequency inside the surf zone, demonstrating that non-linear effects were prevailing over dispersive effects. Thus,

the study of wave celerity through the computation of  $c_\varphi$  at different frequencies is not relevant inside the surf zone. In this paper, we analyze broken wave celerity defining it as the wave front speed. An adequate method for its computation is presented in Section 6.3.2. This study is based on the analysis of an extensive in-situ data set collected during the ECORS-Truc Vert 2008 field experiment (Section 6.3.3). The influence of wave nonlinearities on  $c_b$  is examined, in particular for high-wave energy events. Then, we evaluate the predictive ability of several non-linear celerity models (Section 6.3.4), and finally, the influence of very low frequency pulsations of the circulation on wave celerity is discussed (Section 6.3.5). Conclusions are stated in Section 6.3.6.

### 6.3.2 Field data and methods

#### 6.3.2.1 Description of the study area

The study is based on data collected during the ECORS (SHOM-DGA) field experiment (*Sénéchal et al.*, 2011), a 6-week period of international fieldwork, carried out in March-April 2008 at Truc Vert Beach. This sandy beach is located on the southern part of the French Atlantic coastline, at approximately 10 km north of the Cap Ferret spit at the mouth of the Arcachon Lagoon.

This double-barred beach has a fairly mild slope of about 3% and typically exhibits an inner bar and rip system in the intertidal domain (see *Castelle et al.*, 2007). However the inner-bar geometry was reasonably alongshore-uniform throughout the experiment as a results of quasi-persistent high-energy conditions and high offshore wave angle to the shore. A detailed description of the inner bar evolution is given in *Almar et al.* (2010). During the field experiment, the tidal range ranged from 2 m to about 4 m, allowing instruments to be deployed safely at low tide while measurements were obtained from about mid tide to high tide.

The offshore wave characteristics were given by a waverider buoy deployed offshore of the study area in 54 m water depth. A very wide variety of incoming swell conditions were encountered during the deployments (see grey areas in Figure 6.8), from small (significant wave height  $H_{1/3} = 1$  m) to very large waves ( $H_{1/3} = 8$  m), and significant wave periods mostly varying from 6 to 14 s. In particular, four storm events have been recorded during the experiment ( $H_{1/3} > 4$  m), including a 10-year return storm with  $H_{max}$  larger than 10 m.

#### 6.3.2.2 Instrument deployment

Synchronized pressure sensor lines were set up in the cross-shore direction. Several cross-shore transects have been deployed consecutively at different locations. Each transect was made up of an Acoustic Doppler Velocimeter (ADV) in central location, surrounded by two pressure sensors synchronized in time with the ADV, separated by



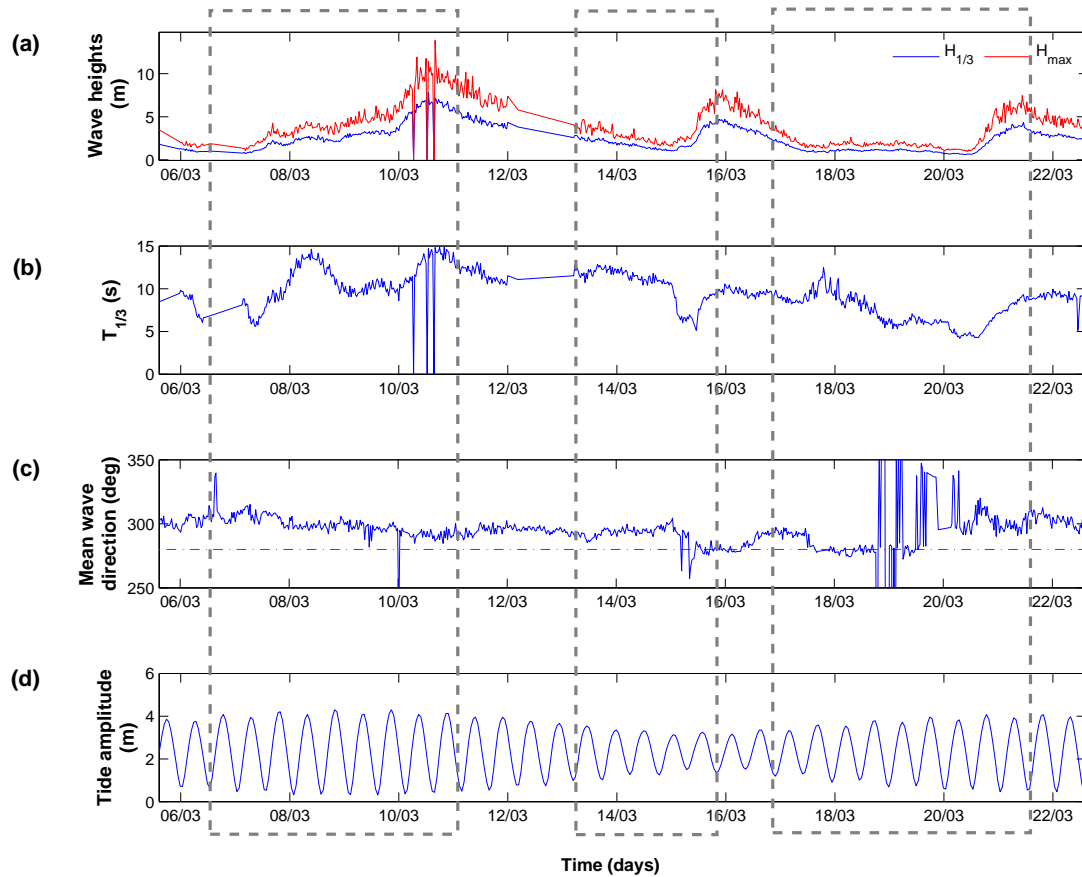


FIGURE 6.8 – Time series of wave and tide conditions offshore of the study area (at 54 m depth). (a) : Significant and maximum wave heights (m). (b) : Significant period (s). (c) : Mean wave direction (deg), (· - ·) : normal incidence to the shore. (d) : Tide amplitude (m). The dashed frames mark the successive instrument deployments.

about 15 m. Data were acquired at a sample rate of 16 Hz.

Instruments were deployed in fairly alongshore-uniform parts of the beach (see Figure 6.9). While well-developed inner bar and rip morphology typically results in ubiquitous intense rip current circulations along this section of coastline (*Bruneau et al., 2009b*), rip channels only barely form at the end of the experiment during a low-energy wave conditions (*Almar et al., 2010*), that is, when concurrent broken-wave celerity measurements were not performed. When celerity measurements were performed, rip current circulations were quasi-inexistent because of both the alongshore-uniform beach geometry and the high offshore wave angle to the shore. Therefore cross-shore and longshore currents are assumed to have been rather alongshore-uniform during most of the experiment, which means that wave-current refraction was not significant. Moreover, tide-induced currents are extremely weak along this section of the coastline and therefore do not affect wave directionality. Thus, while propagating shoreward, wave direction is mainly affected by bathymetric refraction. Considering the fairly alongshore-uniform beach morphology at the deployment area, we assume that when the waves reached the sensors, they were propagating nearly normally to the beach : we estimate that wave angle to the shore was less than  $10^\circ$ . The celerity measured at our transects is the cross-shore component of the celerity. However, for an incidence angle smaller than  $10^\circ$  the measured celerity is a good estimation of the total celerity with less than 2 % error. In this study, we neglect wave obliquity effects and we consider the measured celerity as the total wave celerity. Celerity data was recorded during 23 high tides, corresponding to about 140 h.

### 6.3.2.3 Computation of absolute and relative wave celerity

In this study, the broken wave celerity is computed in the following way :

$$c_b = \frac{dx_b}{dt} \approx \frac{\delta D}{\delta t}, \quad (6.5)$$

where  $x_b$  is the cross-shore position of the wave front,  $\delta D$  the distance which separates the sensors and  $\delta t$  the time lag between the signals recorded by the two pressure sensors (see Figure 6.7).

From a practical point of view,  $\delta t$  was computed with a cross-correlation between two different sensors time series. Thus, we do not determine the time lag for a given wave, but for a set of several consecutive waves, and consider  $c_b$  as an estimation of the mean celerity of the wave fronts during a few minutes (averaging over 10 or 3 minutes in this study). The time lag  $\delta t$  is determined with a precision of  $\pm 1/f_{\text{sampl}}$  seconds, with  $f_{\text{sampl}} = 16$  Hz the sampling rate of the sensors, leading to a maximum error of 2 % on the measure of celerity (for  $\delta D = 15$  m).

As the wave celerity can evolve quickly within the surf zone, the choice of  $\delta D$  is of significant importance. In order to test our spatial resolution, we performed some

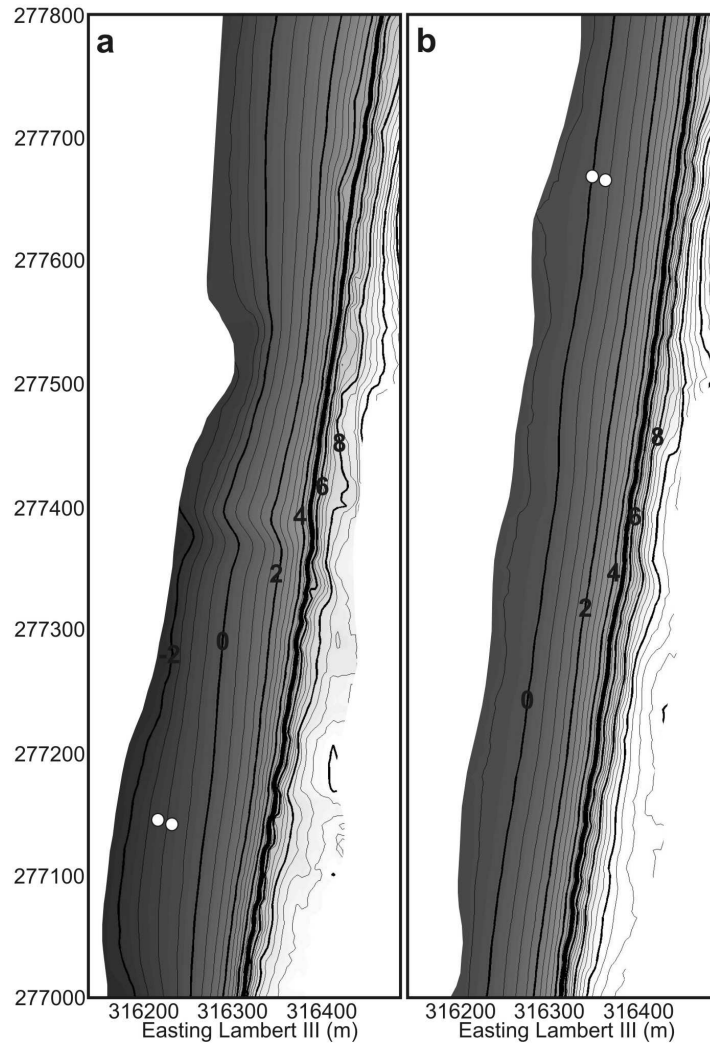


FIGURE 6.9 – a) Location of the two pressure sensors (white circles) deployed from March 6 to March 11 2008 superimposed to the beach morphology surveyed on March 9. b) Location of the two pressure sensors (white circles) deployed from March 13 to March 21 2008 superimposed to the beach morphology surveyed on March 14. Note that in both panels the ADVs are located between the pressure sensors.

computations of wave celerities considering a distance two times shorter. These celerities were consistent with those computed for  $\delta D = 15$  m with less than 2% error.

The sensitivity of the cross-correlation method to low and high-frequency components of the signal was investigated. Comparisons between celerity obtained with and without prior high-frequency filtering of the signal were performed for 250 values, with a cut-off frequency  $f_c = 1/3$  Hz. The difference was negligible (about 1% in total). Similar results have been obtained with prior suppression of low-frequency oscillations ( $f_c = 1/25$  Hz).

The measured wave celerity is relative to the beach : it is an absolute celerity,  $c_a$ . In the case of a current superimposed on the waves, there is a shift in the celerity that should be taken into account, since the different theories give a celerity relative to the water  $c_r$ . We have to consider the effects of the cross-shore current, generally vertically sheared, on wave celerity. *Kirby and Chen* (1989) showed that for a vertically variable current  $U(z)$  such as  $|U/c| < O(1)$  we have  $c_a = c_r + U_e$  with, in shallow water :

$$U_e = \frac{1}{h} \int_{-h}^0 U(z) dz. \quad (6.6)$$

The cross-shore current was measured at a single elevation by the ADV, close to the bottom (30 – 50 cm from the sand bed). For most of the data (22 tides over 23), the 10-minute averaged cross-shore velocities measured by the ADV,  $U_m$ , were such as  $|U_m/c_b| < 0.05$ . Moreover, they were offshore directed : they correspond to undertow-type currents. Several studies have shown that the intensity of this type of currents varies significantly vertically, and generally reaches its maximum close to the seabed (see for instance *Ting and Kirby*, 1994; *Cox*, 1995), that is, in the vicinity of the location of our current meters. The depth- and time- integrated velocity  $|U_e|$  is therefore smaller than  $|U_m|$ . We estimate that  $U_e$  represents at the most 2.5 % of  $c_b$ , which is of the order of magnitude of the errors on the computation of  $c_b$ .  $U_e$  is neglected for those tides, i.e. the measured celerity is representative of the relative celerity. The remaining data (called record 13) will be studied separately in Section 6.3.3.

On the whole, we estimate that  $c_b$  is a good estimation of the broken wave celerity with less than 3% error.

The present work is exclusively devoted to the study of wave celerity in the surf zone. As the location of the surf zone can vary, depending on tide and incoming wave heights, the same instruments can be located inside the surf zone at a given time, and in the shoaling zone later. The 10-min (or 3-min) long records corresponding to non-breaking waves are therefore identified and removed from the dataset. For some of the deployments, video images of the area were recorded, and thanks to time-stacks analysis (see *Almar et al.*, 2008, for details), the width and position of the surf zone can be precisely determined throughout the experiment. When this information is not available, we estimate the difference of energy between the two sensors using the linear theory in

order to identify when breaking occurred.

After calibration of the sensors, statistic wave characteristics (the mean wave heights, period and water level) are computed for the pressure sensors using a wave-by-wave analysis (see *Hamm*, 1995, for the method).

### 6.3.3 Analysis of experimental results

The results presented in this section are based on celerities calculated by cross-correlation between 10 min long signals, which represent a data set of 707 values of celerity in the surf zone.

In the surf zone, wave dynamics are mainly controlled by two non-dimensional parameters :  $\gamma = H/d$  and  $\mu = (d/\lambda)^2$ , where  $H$  is the wave height,  $d$  the characteristic water depth and  $\lambda$  the wavelength. From a practical point of view,  $d$  is estimated by the mean water depth  $\bar{h}$  and  $H$  by the root mean square wave height  $H_{rms}$ . The  $\mu$  parameter quantifies the frequency dispersion effects, and  $\gamma$  quantifies the non-linear effects. For our dataset,  $\mu \sim 0.0001 - 0.005$ , while  $\gamma$  can be  $O(1)$ .

Figure 6.10 shows  $c_b$  as a function of the mean water level  $\bar{h}$ . The dashed line is the linear approximation in shallow water ( $\mu \ll 1$ ) :  $c_\varphi = (g\bar{h})^{1/2}$ . To first order, the linear theory gives a good description of the measured celerities, despite an overall underestimation. Considering the dispersive effects, with the exact linear phase velocity  $c_\varphi = \left(\frac{g}{k} \tanh(k\bar{h})\right)^{1/2}$ , does not improve the prediction since it leads to an even larger underestimation of  $c_b$ . For the surf zone data, the quadratic error given by the linear theory is  $R_{rms} = 12.8\%$ . The empirical modification of the linear theory  $1.3(g\bar{h})^{1/2}$ , arisen from laboratory observations (see *Stive*, 1984), and commonly used in nearshore propagation models (e.g., *Schäffer et al.*, 1993), does not give a better prediction as  $R_{rms} = 15.3\%$ . For our data set, the best predictor in the form  $A(g\bar{h})^{1/2}$  is obtained for  $A = 1.14$  (see the plain line in Figure 6.10), with  $R_{rms} = 4.8\%$ .

In previous field data studies (see for instance *Thornton and Guza* (1982), and more recently *Holland* (2001)), a strong correlation between the error given by the linear theory and the broken-wave heights was observed. In particular, *Holland* (2001) emphasized the importance of accounting for wave amplitude in the calculation of wave celerity with respect to depth inversion. The amplitude-dependence of  $c_b$  is studied in detail in the following part of the paper, which includes results for highly non-linear waves.

Finite-amplitude effects can be quantified by the non-linearity parameter  $\gamma$ , calculated here for 10 min periods. The value of  $\gamma$  depends significantly on the location inside the surf zone. In the inner surf zone,  $\gamma$  remains close to a constant value of about 0.4, while it increases quickly when the wave approaches the swash zone (small  $\bar{h}$ ). These variations are consistent with those observed in previous field studies, in particular with *Sénéchal et al.* (2004), concerning a previous experiment at the same study area.

Figure 6.11 shows the measured celerities normalized by the linear approximation

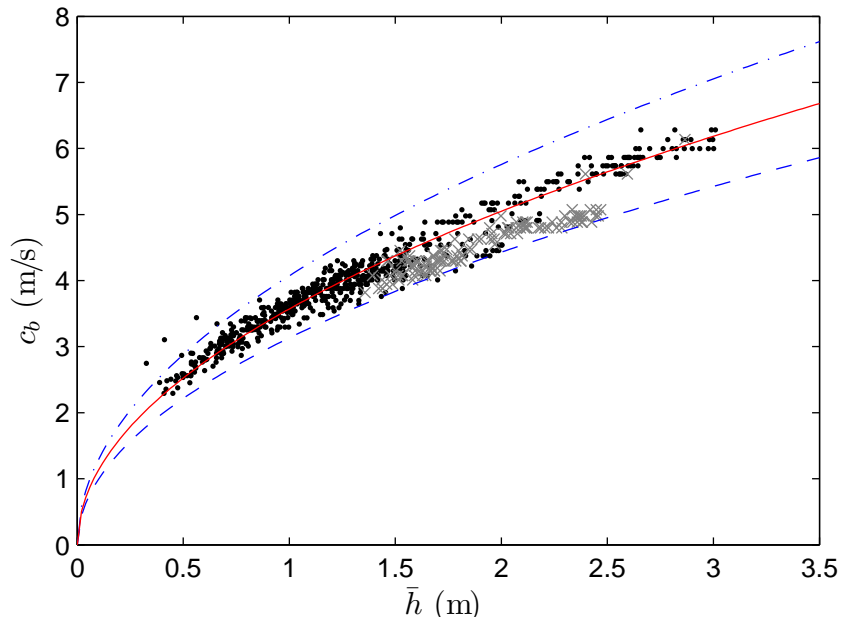


FIGURE 6.10 –  $c_b$  as a function of  $\bar{h}$ . Data inside the surf zone ( $\bullet$ ), outside the surf zone ( $\times$ ),  $(g\bar{h})^{1/2}$  (–),  $1.3(g\bar{h})^{1/2}$  (– · –),  $1.14(g\bar{h})^{1/2}$  (—).

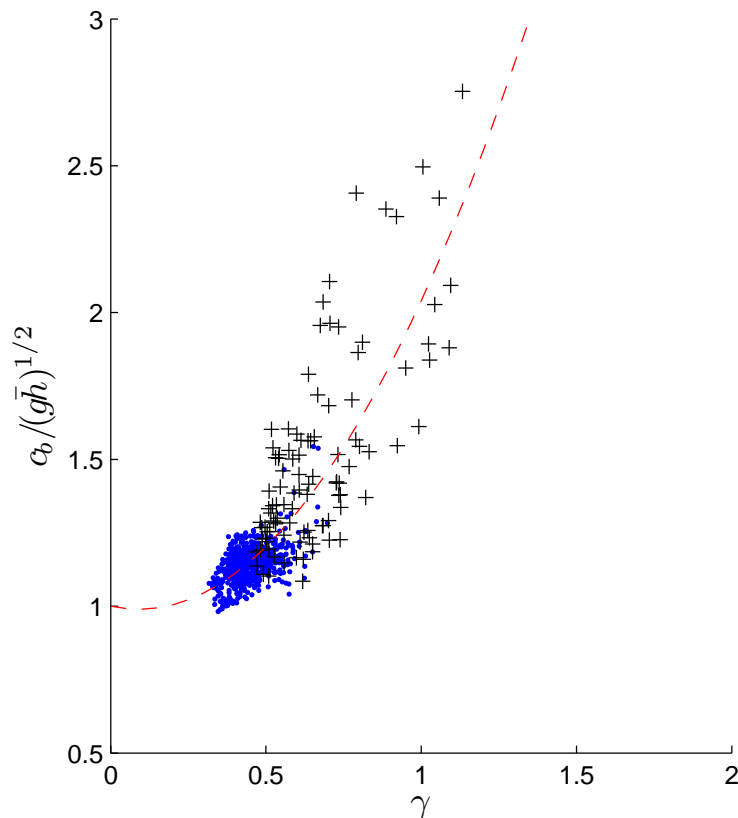


FIGURE 6.11 –  $c_b/(g\bar{h})^{1/2}$  as a function of  $\gamma$ . ( $\cdot$ ) : Data inside the surf zone (first data processing). ( $+$ ) : Data obtained by a second specific processing for small water depth. (– –) : Polynomial fit of the data of equation :  $c/(g\bar{h})^{1/2} = 0.13\gamma^2 - 0.23\gamma + 1$ .

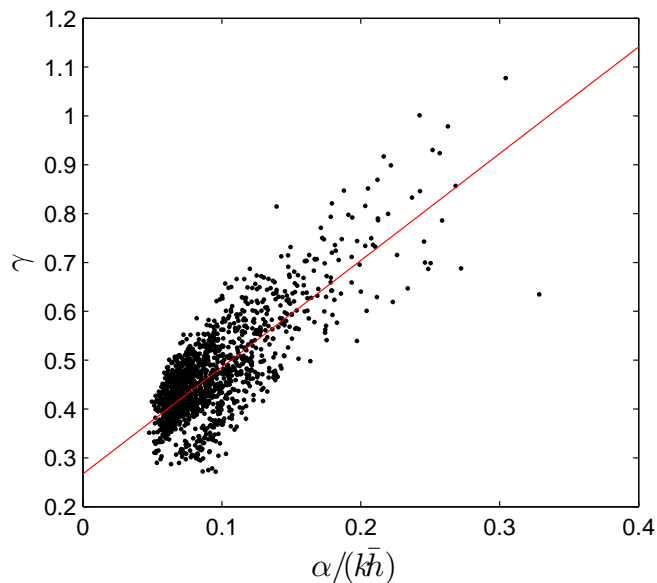


FIGURE 6.12 –  $\gamma$  as a function of  $\alpha/(k\bar{h})$ . (—) : linear fit of the data ( $\gamma = 2.19\alpha/(k\bar{h}) + 0.27$ ).

in shallow water (dots), as a function of the non-linearity parameter  $\gamma$ . In order to study the behaviour for strong non-linearities, a second data processing is specifically performed for the smallest water depth recorded. This second dataset is represented by crosses. These parts of the signal were not used at first because both sensors were not always totally submerged. In this case, the way to determine wave characteristics implies some approximations and so is presumably less accurate. In particular,  $\bar{h}$  is approximated using the water depth measured by the most submerged sensor corrected by the local beach slope to estimate its value between the sensors, considering that set-up effects are not significant over the considered distance. In order to determine  $\gamma$  at the most onshore sensor, we follow the analysis of *Raubenheimer et al.* (1996) and *Sénéchal et al.* (2001, 2005), who found a positive linear dependence of  $\gamma$  on the normalized slope  $\alpha/(k\bar{h})$  (where  $\alpha$  is the local beach slope).  $\gamma$  is then calculated using a linear relationship between  $\gamma$  and  $\alpha/(k\bar{h})$  deduced from the initial dataset (see the red line in Figure 6.12). Thereafter, we call *Data1* the first part of the dataset ( $(\cdot)$  in Figure 6.11), where wave characteristics are directly computed from measurements. The whole dataset, including values computed from the second data processing (+), is called *Data2*.

If the accuracy of the computation of  $c_b$  is not significantly deteriorated for this second part of the dataset, relatively large errors can be made in the determination of the highest values of  $\gamma$ , since they are determined using a rough empirical relationship. However, it clearly appears that the difference between measured celerities and linear predictions increases significantly for high values of  $\gamma$ , with  $c_b$  exceeding up to 2.5 times the linear prediction. This demonstrates that a predictor as  $A(g\bar{h})^{1/2}$  is no longer accurate while considering high values of  $\gamma$ .

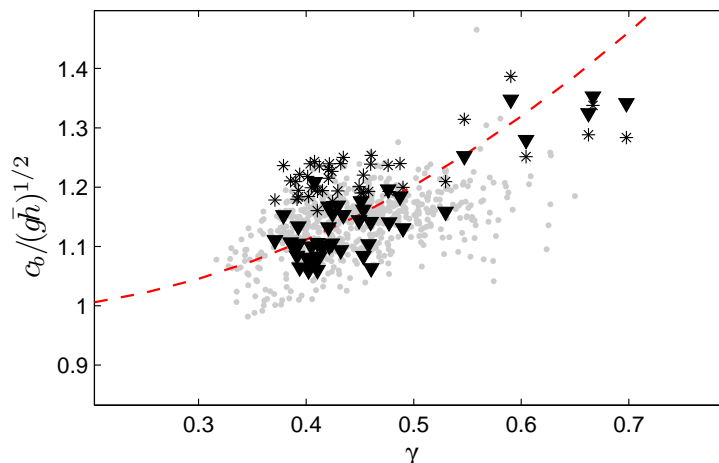


FIGURE 6.13 – Effect of the mean cross-shore current.  $c_b/(g\bar{h})^{1/2}$  as a function of  $\gamma$ , for the whole data set in grey, and for the record number 13 in black, with (\*) and without ( $\blacktriangledown$ ) the mean cross-shore current.(red - - -) : polynomial fit of the data defined in Figure 6.11.

The data corresponding to the tide 13 have been treated separately, since they correspond to an higher intensity of the measured cross-shore current  $U_m$  (after averaging over 10 minutes).  $U_m$  was representing up to 15 % of the  $c_b$ . Moreover, the currents were onshore-directed during this particular event as the measurements were concurrent to the establishment of a rip current circulation. The currentmeter was located in the vicinity of the onshore component of the wave-driven circulation cell. Wave-driven rip current circulations are known to be nearly depth-uniform except in the rip head and the feeder currents (*Hass and Svendsen, 2002*). Therefore equation (6.6) reads  $U_e \approx U_m$  and implies that the effect of the mean current cannot be neglected anymore. Absolute (\*) and relative ( $\blacktriangledown$ ) normalized celerities are plotted in Figure 6.13. It shows that, accounting for currents for this specific tide, the wave celerities are getting closer to the polynomial approximation previously defined in Figure 6.11 ( $R_{rms} = 3.9\%$  instead of 7.1%).

### 6.3.4 Evaluation of the predictive abilities of several non-linear celerity models

#### 6.3.4.1 Global comparison

It has been shown in Section 6.3.3 that we have to consider non-linear predictors to obtain a more accurate description of broken wave celerity. An exhaustive description of the different celerity models is given in *Catalán and Haller (2008)*. In the present study, we focus on the evaluation of the three most representative non-linear predictors. The solitary wave model, constant form solution of the Boussinesq equations, is historically one of the first models used to describe non-linear behavior. Although it has not been formally derived for broken waves, it has been quite commonly used to describe wave



celerity in shallow water. In this case, the wave celerity is given by :

$$c_b = (g\bar{h}(1 + \gamma))^{1/2}. \quad (6.7)$$

It has been found in previous studies that this predictor tends to overestimate broken wave celerities (see *Thornton and Guza*, 1982, for instance).

The bore model, developed by *Svendesen et al.* (1978), is based on the classical analogy a between broken wave and a hydraulic jump. Wave front celerity is derived from mass and momentum conservation across the wave front :

$$c_b = \left( \frac{gh_1 h_2 (h_1 + h_2)}{2\bar{h}^2} \right)^{1/2}, \quad (6.8)$$

with  $h_1$  and  $h_2$  the water depths respectively ahead and behind the wave front. Most of phase-averaged wave models are based in this expression of  $c_b$ .

*Bonneton* (2004) proposed a generalisation of the bore model using Saint-Venant shock theory (called shock model hereafter). Wave fronts are approximated here using less restrictive hypothesis, by introducing discontinuities satisfying appropriate shock conditions. In particular, contrary to the classical bore model, the wave shape in this model does not have to be constant. The broken-wave celerity is given by

$$c_b = -2(g\bar{h})^{1/2} + 2(gh_1)^{1/2} + \left( \frac{gh_2}{2h_1} (h_1 + h_2) \right)^{1/2}. \quad (6.9)$$

For the two last models, wave asymmetry is taken into account with the introduction of  $h_1$  and  $h_2$ . We define a new non-dimensional parameter representative of wave asymmetry :  $B = \zeta_c/H$ , with  $\zeta_c = h_2 - \bar{h}$  the wave crest elevation.

For *Data1*, we obtain the following errors for the 10-minute averaged celerities : 6.7% for the shock model, 7.2% for the solitary model and 9.9% for the bore model. These results are illustrated in Figure 6.14 ( $\cdot$ ), where wave celerity predictions are plotted as a function of the measurements. Considering the whole dataset *Data2*, the shock model gives an global error of 11.3%, while the solitary wave predictor gives an error of 9.9% and the bore model 14.9%. The three non-linear models give good predictions, but the ability of the solitary wave model and the shock model to predict broken-wave celerity is slightly better. We have to notice that the 10-minute averaging tends to smooth the variations of the wave characteristics. In particular, the dimensionless parameter  $B$  is almost constant when averaged over 10 minutes, whereas the scattering of the values is more important when we consider shorter times (not shown here). It is interesting to compare the ability of these two models to reproduce higher frequency oscillations. For 3 min long computations, i.e. with a dataset of 2286 values in the surf zone (corresponding to *Data1*), we find  $R_{rms} = 7.0\%$  for the shock model, and  $8.0\%$  for the solitary wave model. The shock model gives a slightly better prediction of wave celerity than the solitary wave model while considering high frequency variations of  $c_b$ .

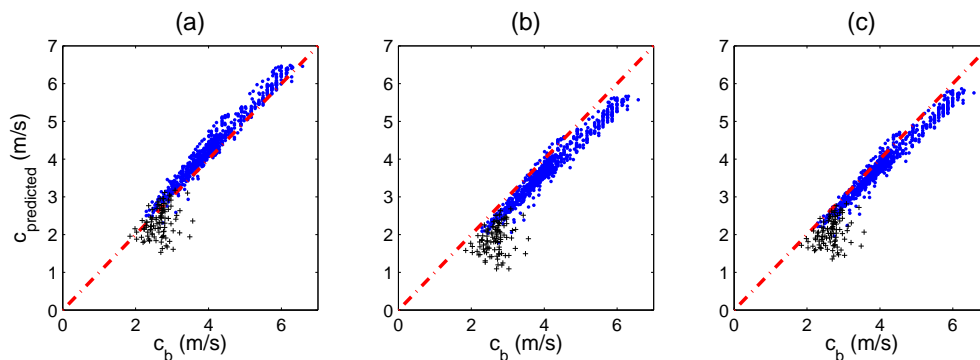


FIGURE 6.14 – Comparisons of predictions versus measurements for the three models for 10-min averaging. (a) : solitary model ( $R_{rms} = 7.2\%$ ). (b) : bore model (9.9%). (c) : shock model (6.7%). (.) : first data processing. (+) : data obtained by a second specific processing for small water depth. (· - ·) :  $c_{predicted} = c_b$ .

### 6.3.4.2 Asymptotic behavior of the models for high values of the non-linearity parameter

The different models have been compared for the whole dataset, but it is important to point out that a large majority of the measurements have been acquired in the inner surf zone, ie. for  $\gamma \sim 0.4 - 0.5$ . In the present section, efforts are concentrated on evaluating how the accuracy of the models varies as a function of non-linearities, based on the analysis of the 10-min averaged celerities.

Wave celerities can be rewritten as a function of  $\gamma$  and  $B$  only in the following forms :

$$\frac{c_b}{(g\bar{h})^{1/2}} = [(1 + (B - 1)\gamma)(1 + B\gamma)(1 + (B - 1/2)\gamma)]^{1/2}, \quad (6.10)$$

for the bore model, and :

$$\frac{c_b}{(g\bar{h})^{1/2}} = -2 + 2(1 + (B - 1)\gamma)^{1/2} + \left[ \frac{(1 + B\gamma)(1 + (B - 1/2)\gamma)}{1 + (B - 1)\gamma} \right]^{1/2}, \quad (6.11)$$

for the shock model. The solitary wave celerity model can also be written under the same form, as a function of  $\gamma$  only (see relation (6.7)). As  $B$  is almost constant while considering 10-min computations, we set  $B$  equal to its mean value and we compare the evolution of  $c_b/(g\bar{h})^{1/2}$  versus  $\gamma$  for the three models (see the curves in Figure 6.15). In the inner surf zone, the behaviour of the shock and bore models are similar : they both tend to slightly underestimate the celerities, in contrast to the solitary wave model which overestimates them. It is in the vicinity of the swash zone that the differences become striking : only the bore model predicts a decrease of the ration  $c_b/(g\bar{h})^{1/2}$  for strong non-linearities, in opposition with the observations. Thus, the bore celerity model, which is the most commonly used predictor of  $c_b$ , appears to be inappropriate to describe dynamics for the shallowest water depths. The shock and solitary wave models both predict an increase of the normalized celerity, but none of them seems to follow the tendency observed the

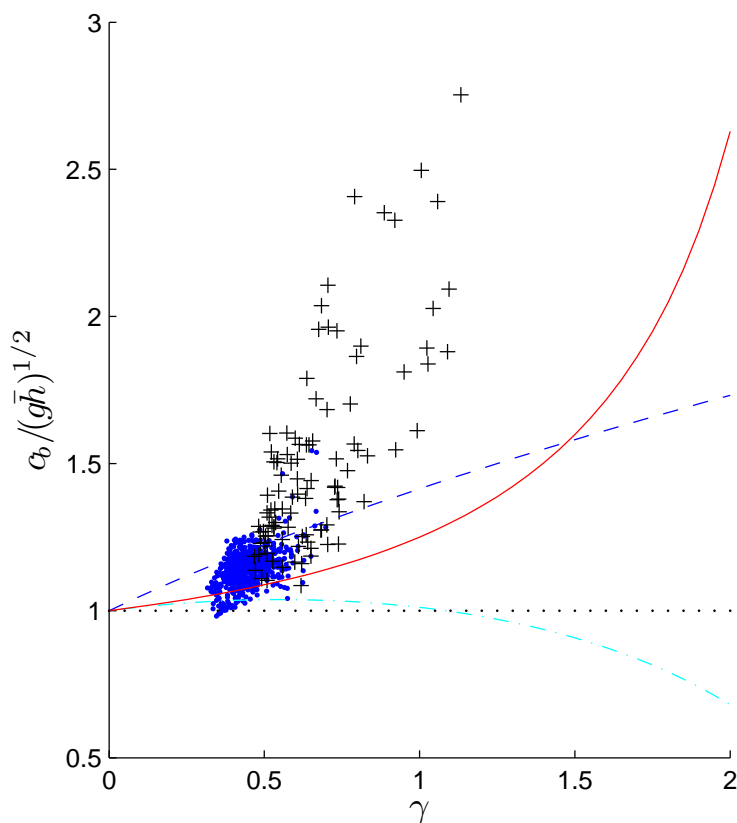


FIGURE 6.15 –  $c_b/(g\bar{h})^{1/2}$  versus  $\gamma$ . Linear model : ( $\cdot\cdot\cdot$ ). Shock model : ( $—$ ). Solitary wave model : ( $- - -$ ). Bore model ( $\cdot - \cdot$ )

data. Noteworthy only the shock model predicts normalized celerities of the same order of magnitude as the measurements.

### 6.3.5 Influence of very low frequency oscillations of the wave-induced currents on wave celerity

Wave breaking over complex bathymetries as observed on the inner bar at Truc Vert beach induces the generation of circulation cells which are non-stationary. Very low frequency (VLF) pulsations can be observed in wave-induced currents, ie. oscillations at significantly lower frequencies than the infragravity waves ( $f < 0.04$  Hz). Recently, several studies have been devoted to the observation or the modelling of these VLF motions (*MacMahan et al.*, 2006; *Bonneton et al.*, 2004; *Castelle et al.*, 2006; *Reniers et al.*, 2007; *Bruneau et al.*, 2009a).

In particular, *Reniers et al.* (2007) and *Bruneau et al.* (2009a) have recently emphasized the strong spatial variability of the intensity of these VLF motions, in both cross-shore and long-shore directions. For instance, they are more intense in the rip neck than over the bars, and are mostly contained within the surfzone. The authors pointed

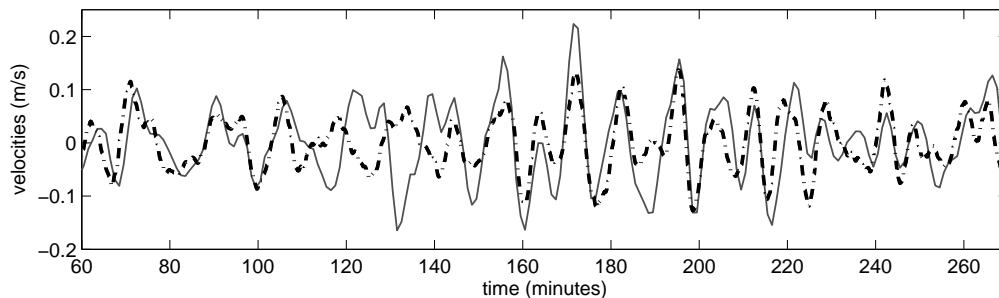


FIGURE 6.16 – Evidence of correlation between VLF oscillations of the cross-shore current and wave celerity. (—) : cross-shore current after 3-min running averaging. (---) : oscillations of the 3-min averaged wave celerity. For both signals, the mean value has been removed.

out the need to investigate in more detail VLF spatial variability in topographically-controlled rip current systems.

For most of our deployments, we identified slow oscillations in the cross-shore current (after a 3 min running mean averaging) at the VLF timescales. For instance, Figure 6.16 shows 10 to 15-min oscillations of the mean cross-shore currents, with an amplitude up to 20 cm/s.

As the measured wave celerity can be written as  $c_b = c_r + U_e$  (cf. equation (6.6)), the VLF oscillations of the cross-shore current should induce VLF oscillations of  $c_b$ , if  $c_b$  is averaged over short-enough durations. Figure 6.16 compares the 3 min averaged cross-shore current with the mean wave celerities computed on 3 min long periods, with a 1 min shift between two consecutive computations. Both signals oscillate with similar amplitude and frequency. Although we cannot explain the phase difference observed in some parts of the signal, it is clear that VLF oscillations of the cross-shore current affect significantly wave celerity fluctuations.

Observation of wave celerity is then an indirect way to characterize very low frequency instationarities of the wave-induced currents. As wave celerity can be estimated from video imaging over large areas (*Almar et al.*, 2008), very low frequency motions may be quantified through remote sensing techniques. Considering the difficulties and expense of collecting data by in situ means, this way of studying VLF motions could be a very interesting alternative to in situ studies.

### 6.3.6 Conclusion

The influence of non-linearities on wave celerity in the surf zone has been quantified. In particular, we found an asymptotic behavior of the normalized wave celerity  $c_b/(g\bar{h})^{1/2}$  for high values of  $\gamma = H/d$ . Comparisons with the predictions given by the three most representative non-linear celerity predictors have been performed. The non-linear models give relatively accurate predictions in the surf zone for  $\gamma \sim 0.4 - 0.5$ , with

RMS differences less than 10%. However, their predictions are less accurate when the waves are approaching the swash zone, i.e. when we consider high values of the nonlinear parameter  $\gamma$ . In particular, the classical non-linear bore model, which is the most commonly used predictor in nearshore wave propagation models, is inappropriate to describe wave dynamics in the vicinity of the swash zone. Contrary to the other nonlinear models, it predicts a decrease of  $c_b/(g\bar{h})^{1/2}$  with increasing  $\gamma$ .

The observation of VLF variations in wave front celerity, correlated with cross-shore current VLF variations, opens up new perspectives concerning the study of VLF motions over a wide spacial area. We speculate that video imagery may be successful in mapping VLF motions from wave celerity to investigate spatial variability in VLF motions at the scale of the beach in detail.

This work is based on an unique dataset inside the surf zone, including data for very shallow water and very strong non-linearities. Broken wave celerities have been measured over a very wide range of incoming wave conditions, including some severe storms. If completed by data collected on beaches of different morphologies, this dataset could be used as a reference for the parametrization of broken wave celerity for wave propagation models in the nearshore.

### Acknowledgements

The authors would like to thank all the financial support of the field experiment, in particular the SHOM-DGA, in the framework of the ECORS project. The authors are also thankful to all the people involved in this experiment. In particular, we would like to thank J.-P. Parisot for GPS positioning and topography, as well as P. Bretel for the instrument deployment. The authors would also like to acknowledge additional financial and scientific support of the French INSU - CNRS (Institut National des Sciences de l'Univers - Centre National de la Recherche Scientifique) program IDAO ("Interactions et Dynamique de l'Atmosphère et de l'Océan"). PhD thesis of M. Tissier is funded by MISEEVA (ANR).

## 6.4 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons présenté une étude de la célérité basée sur l'analyse d'un jeu de données in-situ unique, puisque correspondant à une large gamme de conditions de houle incidente (hauteur significative et période) et de profondeurs d'eau. Ce jeu de données a été confronté aux célérités estimées à l'aide de la théorie linéaire en eau peu profonde et à ses adaptations de la forme  $A(g\bar{h})^{1/2}$ . L'analyse des données a permis de mettre en évidence une valeur optimale du coefficient  $A$  pour notre jeu de données de 1.14. La valeur la plus communément utilisée de ce coefficient ( $A = 1.3$ ), déterminée à partir d'expériences de laboratoire (*Stive*, 1984), s'est avérée inadaptée à décrire notre jeu de données.

L'influence des non-linéarités sur la célérité des vagues en zone de surf a ensuite été quantifiée. Nous avons mis en évidence une forte croissance du rapport  $c_b/(g\bar{h})^{1/2}$  en fonction du paramètre non-linéaire  $\gamma = H/h_0$ . Une estimation de  $c_b$  de la forme  $A(g\bar{h})^{1/2}$  ne peut donc donner qu'une estimation assez grossière de la célérité. Ce jeu de données a ensuite été comparé à différents estimateurs non-linéaires de célérité. D'un point de vue global, les différents modèles donnent de bons résultats en zone de surf interne, avec des erreurs RMS de l'ordre de 7% pour les célérités données par les modèles de l'onde solitaire et des chocs, et de 10% pour le modèle de bores. Les différences entre les modèles deviennent plus frappantes lorsque l'on s'intéresse au comportement asymptotique pour les fortes valeurs de non-linéarités. Le modèle classique de bore est le seul des trois modèles non-linéaires considérés précédemment à prévoir une décroissance de la célérité normalisée  $c_b/(g\bar{h})^{1/2}$  pour les fortes valeurs du paramètre non-linéaire  $\gamma$ . Ce modèle, communément utilisé en modélisation, est donc totalement inadapté à la description de la dynamique des vagues à l'approche de la zone de jet de rive.

La croissance de la célérité normalisée estimée à partir des modèles de chocs et de l'onde solitaire est néanmoins assez éloignée de celle des données expérimentales. Des analyses complémentaires sont nécessaires pour pouvoir interpréter les différences observées. En particulier, il serait intéressant d'étudier l'influence des ondes basse-fréquence sur la célérité. Nous avons montré dans la partie 6.3 que le filtrage ou non des ondes infragravitaires ( $f_c = 0.04Hz$ ) modifiait très peu le calcul de célérité par cross-corrélation pour les données en zone de surf interne (moins de 2% de différence pour un jeu de données de 250 valeurs de célérité). Cependant, à l'approche de la zone de swash, les composantes basse-fréquence (BF) deviennent très énergétiques et peuvent même dominer la dynamique (voir figure 6.17). On peut alors imaginer que la célérité issue de techniques de corrélation puisse être influencée à la fois par les mouvements de l'onde BF et par ceux des fronts d'ondes courtes.

Afin de s'affranchir de ces problèmes, il sera à terme nécessaire de revenir vers une estimation vague-à-vague de la célérité. Une méthode de calcul vague-à-vague semi-

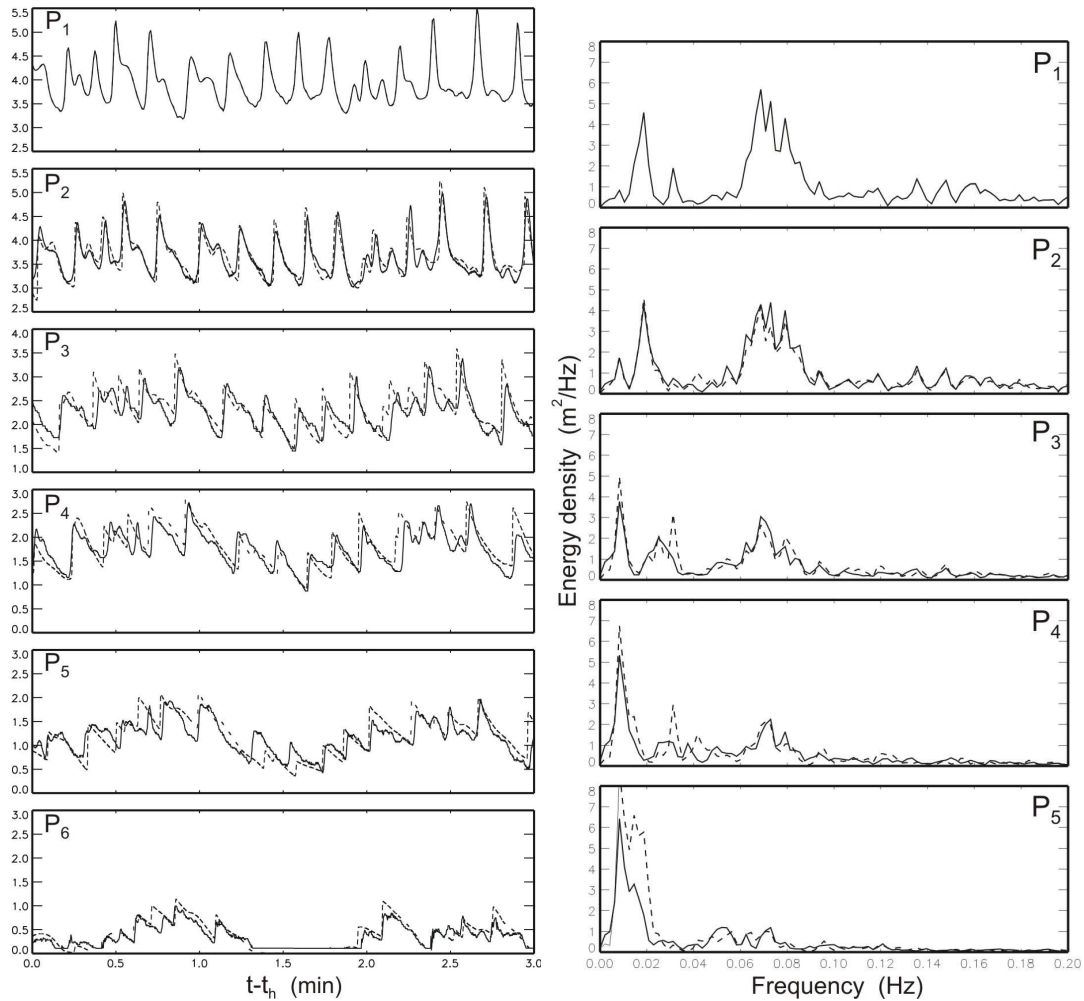


FIGURE 6.17 – Etude in-situ Truc Vert 2001. Colonne de gauche : Séries temporelles de hauteurs d'eau à différentes positions dans la zone de surf interne (P1-P5) et en zone de swash (P6). Colonne de droite : Spectres de densité d'énergie à différentes positions dans la zone de surf interne (P1-5). Figures issues de *Bonneton et al.* (2004).

automatique pour le calcul de  $c_b$  a été développée par M. Postacchini (Univ. Ancona, Italie) lors de son séjour à l'université de Bordeaux. L'analyse du jeu de données ainsi obtenu a montré une très grande variabilité de la célérité vague-à-vague, que nous ne sommes pas encore capables d'interpréter à ce jour. Des tests complémentaires sont en particulier nécessaires pour savoir s'il s'agit d'un problème de méthodologie, ou si la dispersion très importante des données a un sens physique.





# Chapitre 7

## Conclusions et perspectives

Dans ces travaux, nous avons étendu le domaine de validité du code SV SURF-WB (*Marche et al.*, 2007) vers le large en y ajoutant les termes non-hydrostatiques propres aux équations de S-GN. Cette extension a été réalisée avec succès, grâce (1) à une nouvelle formulation des équations de S-GN permettant de traiter séparément et efficacement la partie hyperbolique et les termes dispersifs des équations de S-GN par une méthode de splitting (chapitre 3, *Bonneton et al.*, 2011*d*); (2) au développement d'un nouveau modèle de déferlement, basé sur des basculements locaux et dynamiques vers les équations de SV au niveau des fronts déferlés (chapitre 4, *Tissier et al.*, soumis). De telles approches hybrides avaient été jusqu'à présent uniquement développées pour des modèles faiblement non-linéaires (*Weston et al.*, 2003; *Tonelli and Petti*, 2009, 2010; *Orszaghova et al.*, 2010, 2011). SURF-GN est donc le premier modèle de type Boussinesq fortement non-linéaire à utiliser le concept de choc pour représenter les vagues déferlées. De plus, ces approches hybrides n'incluaient qu'une description très simplifiée du déferlement, rendant difficile la description de trains d'ondes irréguliers, et ne permettant pas d'arrêt du déferlement. Notre modèle propose une gestion vague-à-vague de l'initiation et de l'arrêt du déferlement, et ne nécessite pas de méthode de suivi des fronts déferlés. Il peut donc s'appliquer quels que soient le type de front et la direction de propagation considérés.

La démarche généralement suivie pour étendre le domaine de validité des équations de type Boussinesq vers la zone de surf consiste à introduire une paramétrisation *ad-hoc* de la dissipation d'énergie due au déferlement (*Schäffer et al.*, 1993; *Kennedy et al.*, 2000; *Cienfuegos et al.*, 2010). Ces modèles de déferlement permettent d'obtenir une description très précise de l'évolution spatio-temporelle de la vague, tant au niveau de l'amplitude que de l'asymétrie (*Cienfuegos et al.*, 2010). Cependant, ils requièrent une calibration fine des différents paramètres du modèle de déferlement afin que la dissipation introduite artificiellement soit en accord avec les observations en zone de surf. Dans l'optique de l'utilisation de SURF-GN, à terme, comme un outil opérationnel d'étude de la submersion (ANR MISEEVA), nous avons cherché à rendre les résultats du modèle aussi peu dépendants que possible des choix de l'utilisateur, et donc à minimiser le nom-

## 7 - Conclusions et perspectives

---

bre de ces paramètres. La représentation des fronts déferlés par des chocs est en ce sens très importante puisqu'elle permet d'éviter la paramétrisation de la quantité d'énergie déferlée, qui est calculée implicitement par la théorie des chocs. Le critère d'initiation du déferlement basé sur l'angle du front constitue néanmoins une paramétrisation empirique importante de notre modèle. Nous travaillons actuellement à la mise en place d'un critère plus physique, inspiré des travaux de *Matsuyama et al.* (2007) et de *Bjørkavåg and Kalisch* (2011). Ce critère serait basé sur le fait qu'à l'initiation du déferlement, la vitesse de la crête  $u_c$  dépasse la célérité du front  $c_b$ . Nos tests préliminaires donnent des résultats encourageants mais se heurtent pour l'instant à des problèmes liés à la qualité du calcul de la célérité instantanée du front à chaque pas de temps.

Les nombreuses validations à l'aide de données de laboratoire ont montré que notre modèle, malgré sa simplicité, permettait d'obtenir une bonne description de l'évolution de la forme des vagues et du niveau moyen de la zone de levée à la zone de surf. Les mouvements de la ligne d'eau sont également bien reproduits, et cela même sur des bathymétries complexes. L'application de SURF-GN à des cas de houles bichromatiques a montré que le modèle pouvait simuler correctement la transformation des ondes infragravitaires sur une plage plane. SURF-GN a pu en particulier reproduire le raidissement de l'onde infragravitaire ainsi que son déferlement. Ce mécanisme de dissipation de l'énergie infragravitaire sera analysé et quantifié dans le cadre du projet Hydralab IV GLOBEX, qui permettra d'acquérir des données à haute résolution spatiale et temporelle de l'évolution des vagues et des basse-fréquences sur une plage à pente douce (1 : 80) pour une large gamme de conditions de vagues incidentes. Ce jeu de données unique nous donnera l'opportunité de continuer à valider et développer notre modèle pour la description de la dynamique des vagues dans des cas hautement non-linéaires.

SURF-GN a ensuite été utilisé pour analyser la dynamique des fronts d'ondes longues de type tsunami en zone littorale (chapitre 5). Afin d'évaluer les performances de notre modèle quant à la reproduction des différentes formes de fronts, nous avons tout d'abord considéré le cas académique du ressaut hydraulique. Nous avons ainsi pu montrer que le modèle décrivait correctement les trois principaux types de ressauts, c'est-à-dire les états ondulé non déferlé, ondulé déferlé et déferlé sans ondulations, pour des nombres de Froude proches des valeurs expérimentales. Il est important de noter que SURF-GN est, à notre connaissance, le premier modèle moyenné sur la verticale capable de reproduire la dynamique des ressauts pour une large gamme de nombres de Froude. Les caractéristiques des trains d'ondulations sont de plus bien décrites par le modèle, mis à part lors de l'initiation du déferlement. Il a été montré expérimentalement que les effets de friction et de confinement latéral pouvaient avoir une influence assez importante sur la dynamique du ressaut. Les valeurs du nombre de Froude auxquelles se déclenchent les transitions d'un type de ressaut à l'autre ainsi que la longueur d'onde

---

des ondulations secondaires peuvent en particulier dépendre des caractéristiques du canal (*Chanson, 2008*). Des simulations 2DH, incluant les effets de friction, seront donc nécessaires à terme pour affiner nos analyses, et tenter d'expliquer les différences observées entre les données expérimentales et les résultats numériques.

La transformation d'une onde longue de type tsunami en ressaut ondulé à l'approche de la plage a ensuite été étudiée. Nous avons montré que le développement d'ondulations pouvait aboutir à une amplification de l'ordre de deux de la hauteur du front en fin de zone de levée. Cette amplification aura très certainement des conséquences du point de vue de l'impact du tsunami sur les structures côtières mais également sur le franchissement d'ouvrages de protection. L'influence sur le run-up a ensuite été analysée. Si les tendances générales d'évolution de la ligne d'eau sont assez bien décrites par le modèle SV (SURF-GN sans effets dispersifs), son utilisation provoque une sous-estimation de l'ordre de 10% de l'excursion maximale de la ligne d'eau. Les ondulations secondaires peuvent de plus influencer de manière assez importante la phase de run-down de l'onde longue principale. Cette étude confirme donc l'importance de la prise en compte des effets dispersifs pour obtenir une description précise des mouvements de la ligne d'eau.

La prochaine étape dans le développement de SURF-GN est l'extension à deux dimensions horizontales. Les méthodes numériques présentées dans *Bonneton et al. (2011d)* s'appliquent de manière assez directe au cas 2DH. Leur implémentation est en cours. Un enjeu important sera alors d'étendre le modèle de déferlement développé pendant ces travaux de thèse à deux dimensions.

Une fois cette extension réalisée, nous pourrons utiliser les données issues des campagnes de mesure sur la dynamique des mascarets présentées dans *Bonneton et al. (2011a,c)* afin de continuer la validation de SURF-GN pour la description de la dynamique des ondes longues en eau peu profonde. L'étude de ces mascarets pourrait permettre d'améliorer notre compréhension de la transformation des fronts de tsunamis, car ces deux phénomènes, bien que d'origines différentes, présentent de fortes analogies du point de vue de leur dynamique.

Nous pourrons également nous intéresser à l'étude de la circulation induite par les vagues et leur déferlement au-dessus de plages sableuses caractérisées par la présence de systèmes de barres transverses et chenaux. Notre modèle pourrait être un outil particulièrement adapté à l'étude de ces circulations complexes, principalement contrôlées par les gradients de dissipation résultant du déferlement non-homogène des vagues sur de tels systèmes (*Peregrine, 1998; Bonneton et al., 2010*). Nous pourrons en particulier utiliser le modèle pour analyser la dynamique des courants sagittaux (*rip current*) et des instabilités hydrodynamiques associées.

Nous avons finalement étudié dans le chapitre 6 la dynamique non-linéaire des

## 7 - Conclusions et perspectives

---

fronts déferlés d'un point de vue essentiellement expérimental. Plus précisément, nous avons réalisé une l'étude de la célérité des vagues  $c_b$  en zone de surf à partir de données in-situ issues de la campagne de mesure ECORS-Truc Vert 2008. L'analyse de ce jeu de données nous a permis de quantifier l'effet des non-linéarités pour une large gamme de conditions de houles incidentes. Les performances de différents modèles analytiques de célérité ont pu ensuite être comparées. L'analyse du comportement asymptotique pour les fortes valeurs du paramètre non-linéaire, i.e. les plus faibles profondeurs d'eau, a montré que le modèle classique de *bore* ne permettait pas de décrire la dynamique des fronts déferlés à l'approche de la zone de swash. En effet, ce modèle prédit une décroissance de la célérité normalisée  $c_b/(g\bar{h})^{1/2}$  pour les plus fortes de non-linéarités, en claire opposition avec les données expérimentales.

Des tests préliminaires concernant les performances du code SURF-GN d'un point de vue de l'estimation de la célérité des vagues déferlées ont été réalisés avec succès dans le cas de houles mono- et bichromatiques. Dans le contexte du développement des méthodes d'analyse du littoral couplant imagerie vidéo et modèles hydrodynamiques (*Van Dongeren et al.*, 2008; *Almar et al.*, 2011; *Birrien et al.*, 2011), il serait intéressant de continuer la validation du modèle en terme de célérité à l'aide des données in-situ du Truc Vert. Ces couplages sont importants car ils permettent d'obtenir des caractéristiques des vagues non-accessibles à l'heure actuelle par la vidéo ( $H, h_1, h_2$ ), mais nécessaires pour prendre en compte les non-linéarités lors de l'inversion du champ de vitesse.

# Bibliographie

- Abadie, S., J. Harris, and S. Grilli, Numerical simulation of tsunami generation by the potential flank collapse of the Cumbre Vieja volcano, *Proc. 21th Offshore and Polar Engng. Conf. (ISOPE11, Maui, Hawaii, USA, June 19-24, 2011)*, 2011.
- Almar, R., P. Bonneton, N. Sénéchal, and D. A. Roelvink, Wave celerity from video imaging : a new method, *Proc. Int. Conf. Coast. Eng., ASCE*, 661–673, 2008.
- Almar, R., B. Castelle, B. G. Ruessink, N. Sénéchal, P. Bonneton, and V. Marieu, Two- and three-dimensional double-sandbar system behaviour under intense wave forcing and a meso-macro tidal range, *Continental Shelf Research*, 30, 781–792, 2010.
- Almar, R., R. Cienfuegos, P. A. Catalán, F. Birrien, B. Castelle, and H. Michallet, Nearshore bathymetric inversion from video using a fully non-linear Boussinesq wave model, *Journal of Coastal Research*, SI 64, 2011.
- Audusse, E., F. Bouchut, M.-O. Bristeau, R. Klein, and B. Perthame, A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 25(6), 2050–2065, 2004.
- Barthélemy, E., Nonlinear shallow water theories for coastal waves, *Surveys in Geophysics*, 25, 315–337, 2004.
- Battjes, J. A., H. J. Bakkenes, T. T. Janssen, and A. R. van Dongeren, Shoaling of subharmonic gravity waves, *J. Geophys. Res.*, 109(C02009), 2004.
- Beji, S., and J. A. Battjes, Experimental investigation of wave propagation over a bar, *Coastal Engineering*, 19(1–2), 151–162, 1993.
- Benjamin, T. B., and M. J. Lighthill, On cnoidal waves and bores, *Proceedings of the Royal Society A*, 224(1159), 448–460, 1954.
- Berthon, C., and F. Marche, A positive preserving high order VFRoe scheme for shallow water equations : A class of relaxation schemes, *SIAM J. Sci. Comput.*, 30(5), 2587–2612, 2008.

- Binnie, A. M., and J. C. Orkney, Experiments on the flow of water from a reservoir through an open horizontal channel. II. The formation of hydraulic jumps, *Proc. R. Soc. Lond. A*, 230(1181), 237–246, 1955.
- Birrien, F., B. Castelle, V. Marieu, R. Almar, and H. Michallet, Application of a data-model assimilation method to a 3D surf zone sandbar physical experiment, *Journal of Coastal Research*, SI 64, 2011.
- Bjørkavåg, Magnar, and Henrik Kalisch, Wave breaking in Boussinesq models for undular bores, *Physics Letters A*, 375(14), 1570–1578, 2011.
- Bonneton, N., P. Bonneton, N. Sénéchal, and B. Castelle, Very low frequency rip current pulsations during high-energy wave conditions on a meso-macro tidal beach, *Proc. Int. Conf. on Coastal Eng., ASCE*, vol. 1, 1087–1096, 2004.
- Bonneton, P., Note sur la propagation des vagues en zone de surf interne, *C. R. Acad. Sci. Paris, t. 329, Série II b*, pp. 27–33, 2001.
- Bonneton, P., Wave celerity in the surf zone, *Proc. Int. Conf. on Coastal Eng., ASCE*, vol. 1, 392–401, 2004.
- Bonneton, P., Hydrodynamique de la zone affectée par le déferlement, *Journées d'évaluation du PATOM, 12-13 sep 2005, Bordeaux*, 2005.
- Bonneton, P., Modelling of periodic wave transformation in the inner surf zone, *Ocean Engineering*, 34(10), 1459–1471, 2007.
- Bonneton, P., V. Marieu, H. Dupuis, N. Sénéchal, and B. Castelle, Wave transformation and energy dissipation in the surf zone : Comparison between a non-linear model and field data, *Journal of Coastal Research*, SI 39, 329–333, 2004.
- Bonneton, P., N. Bruneau, F. Marche, and B. Castelle, Large-scale vorticity generation due to dissipating waves in the surf zone, *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B*, 13, 729–738, 2010.
- Bonneton, P., J.-P. Parisot, N. Bonneton, A. Sottolichio, B. Castelle, V. Marieu, N. Pochon, and J. Van de Loock, Large amplitude undular tidal bore propagation in the Garonne River, France, *Proc. 21th Offshore and Polar Engng. Conf. (ISOPE11, Maui, Hawaii, USA, June 19-24, 2011)*, 2011a.
- Bonneton, P., E. Barthélemy, F. Chazel, R. Cienfuegos, D. Lannes, F. Marche, and M. Tissier, Recent advances in Serre-Green Naghdi modelling for wave transformation, breaking and runup processes, *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, In Press, Corrected Proof, –, 2011b.

- Bonneton, P., J. Van de Loock, J-P. Parisot, N. Bonneton, A. Sottolichio, G. Detandt, B. Castelle, V. Marieu, and N. Pochon, On the occurrence of tidal bores : The Garonne River case, *Journal of Coastal Research, SI 64*, 2011c.
- Bonneton, P., F. Chazel, D. Lannes, F. Marche, and M. Tissier, A splitting approach for the fully nonlinear and weakly dispersive Green-Naghdi model, *Journal of Computational Physics, 230*(4), 1479–1498, 2011d.
- Briganti, R., M. Brocchini, and R. Bernetti, An operator-splitting approach for Boussinesq-type equations, *GIMC 2004, XV Congresso Italiano di Meccanica Computazionale - AIMETA*, 2004.
- Brocchini, M., and N. Dodd, Nonlinear shallow water equation modeling for coastal engineering, *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering, 134*(2), 104–120, 2008.
- Brocchini, M, R Bernetti, A Mancinelli, and G Albertini, An efficient solver for nearshore flows based on the waf method, *Coastal Engineering, 43*(2), 105–129, 2001.
- Bruneau, N., B. Castelle, P. Bonneton, R. Pedreros, R. Almar, N. Bonneton, P. Bretel, J.-P. Parisot, and N. Sénéchal, Field observation of an evolving rip current on a meso-macrotidal well-developed inner bar and rip morphology, *Continental Shelf Research, 29*, 1650–1662, 2009a.
- Bruneau, N., B. Castelle, P. Bonneton, and R. Pedreros, Very low frequency motions of a rip current system : observations and modeling, *J. Coast. Res., SI56, 2*, 1731–1735, 2009b.
- Bruno, D., F. De Serio, and M. Mossa, The FUNWAVE model application and its validation using laboratory data, *Coastal Engineering, 56*(7), 773–787, 2009.
- Bühler, O., On the vorticity transport due to dissipating or breaking waves in shallow-water flow, *Journal of Fluid Mechanics, 407*(01), 235–263, 2000.
- Camarri, S., M.-V. Salvetti, B. Koobus, and A. Dervieux, A low-diffusion muscl scheme for les on unstructured grids, *Computer and Fluids, 33*(9), 1101–1129, 2004.
- Carter, J. D., and R. Cienfuegos, The kinematics and stability of solitary and cnoidal wave solutions of the Serre equations, *European Journal of Mechanics - B/Fluids, 30*(3), 259–268, 2011.
- Castelle, B., P. Bonneton, N. Sénéchal, H. Dupuis, R. Butel, and D. Michel, Dynamics of wave-induced currents over a multi-barred beach on the aquitanian coast, *Cont. Shelf Res., 26*(1), 113–131, 2006.

- Castelle, B., P. Bonneton, H. Dupuis, and N. Sénéchal, Double bar beach dynamics on the high-energy meso-macrotidal french aquitanian coast : A review, *Marine Geology*, 245(1–4), 141–159, 2007.
- Catalán, P. A., and M. C. Haller, Remote sensing of breaking wave phase speeds with application to non-linear depth inversions, *Coast. Eng.*, 55(1), 93–111, 2008.
- Chanson, H., Turbulence in positive surges and tidal bores. Effects of bed roughness and adverse bed slopes, *Hydraulic Model Report No. CH68/08, Div. of Civil Engineering, The University of Queensland, Brisbane, Australia, 121 pages*, 2008.
- Chanson, H., Undular tidal bores : Basic theory and free-surface characteristics, *Journal of Hydraulic Engineering-ASCE*, 2010.
- Chanson, H., and J. S. Montes, Characteristics of undular hydraulic jumps : Experimental apparatus and flow patterns, *Journal of Hydraulic Engineering-ASCE*, 121, 1995.
- Chazel, F., D. Lannes, and F. Marche, Numerical simulation of strongly nonlinear and dispersive waves using a Green-Naghdi model, *Journal of Scientific Computing*, pp. 1–12, 2010.
- Cienfuegos, R., E. Barthélemy, and P. Bonneton, A fourth-order compact finite volume scheme for fully nonlinear and weakly dispersive Boussinesq-type equations. part I : model development and analysis, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 51(11), 1217–1253, 2006.
- Cienfuegos, R., E. Barthélemy, and P. Bonneton, A fourth-order compact finite volume scheme for fully nonlinear and weakly dispersive Boussinesq-type equations. part II : boundary conditions and validation, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 53(9), 1423–1455, 2007.
- Cienfuegos, R., E. Barthélemy, and P. Bonneton, Wave-breaking model for Boussinesq-type equations including roller effects in the mass conservation equation, *Journal of Waterway Port Coastal and Ocean Engineering*, 136, 10–26, 2010.
- Cox, D. T., *Experimental and numerical modelling of surf zone hydrodynamics*, Ph.D. dissertation, University of Delaware, Newark, Del, 1995.
- Dalrymple, R. A, S. T. Grilli, and J. T. Kirby, Tsunamis and challenges for accurate modeling, *Oceanography*, 19(1), 142–151, 2006.
- De Bakker, A.T.M., Infragravity waves : propagation, dissipation and sediment transport in the inner surf zone of a low sloping beach., Master’s thesis, Utrecht University, The Netherlands, 2011.



- Dingemans, M. W., *Water wave propagation over uneven bottoms, Part 2*, vol. 13, World Scientific, Singapore, 1997.
- Dongerren, A. R. van, H. J. Bakkenes, and T. T. Janssen, Generation of long waves by short wave groups, *Proceedings of the 28th International Conference on Coastal Engineering*, 1093–1105, 2002.
- Duncan, J. H., An experimental investigation of breaking waves produced by a towed hydrofoil, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 377(1770), 331–348, 1981.
- El, G. A., R. H. J. Grimshaw, and N. F. Smyth, Unsteady undular bores in fully nonlinear shallow-water theory, *Physics of Fluids*, 18, 2006.
- Elgar, S., E. L. Gallagher, and R. T. Guza, Nearshore sandbar migration, *Journal of Geophysical Research*, 106(C6)(11), 11623–11627, 2001.
- Erduran, K. S., Further application of hybrid solution to another form of Boussinesq equations and comparisons, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 53(5), 827–849, 2007.
- Erduran, K. S., S. Ilic, and V. Kutija, Hybrid finite-volume finite-difference scheme for the solution of Boussinesq equations, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 49(11), 1213–1232, 2005.
- Favre, H., Etude théorique et expérimentale des ondes de translation dans les canaux découverts, *Dunod, Paris*, 1935.
- Gallouët, T., JM. Hérard, and N. Seguin, Some approximate Godunov schemes to compute shallow-water equations with topography, *Comput. Fluids*, 32(4), 479–513, 2003.
- Grasso, F., H. Michallet, and E. Barthélemy, Sediment transport associated with morphological beach changes forced by irregular asymmetric, skewed waves, *J. Geophys. Res.*, 116(C03020), 2011.
- Green, A. E., and P. M. Naghdi, A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth, *Journal of Fluid Mechanics*, 78(2), 237–246, 1976.
- Grilli, S. T., M. Ioualalen, J. Asavanant, F. Shi, J. T. Kirby, and P. Watts, Source constraints and model simulation of the December 26, 2004 Indian Ocean tsunami, *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 133(6), 2007.
- Grue, J., E. N. Pelinovsky, D. Fructus, T. Talipova, , and C. Kharif, Formation of undular bores and solitary waves in the Strait of Malacca caused by the 26 December 2004 Indian Ocean tsunami, *Journal of Geophysical Research C : Oceans*, 2008.

- Guibourg, S., *Modélisation numérique et expérimentale des houles bidimensionnelles en zone cotière*, Ph.D. dissertation, Université Joseph Fourier - Grenoble I, France, 1994.
- Guizien, K., and E Barthélemy, Accuracy of solitary wave generation by a piston wave maker, *Journal of Hydraulic Research*, *40*(3), 321–331, 2002.
- Guza, R. T., and E. B. Thornton, Swash oscillations on a natural beach, *J. Geophys. Res.*, *87*(C1), 483–491, 1982.
- Guza, R. T., and E. B. Thornton, Observations of surf beat, *J. Geophys. Res.*, *90*(C2), 3161–3172, 1985.
- Haller, M. C., and P. A. Catalán, Remote sensing of wave roller lengths in the laboratory, *Journal of Geophysical Research*, *114*(C07022), 2010.
- Hamm, L., *Modélisation numérique bidimensionnelle de la propagation de la houle dans la zone de déferlement*, Ph.D. dissertation, Université de Grenoble 1, France, 1995, in French.
- Hass, K. A., and I. A. Svendsen, Laboratory measurements of the vertical structure of rip currents, *Journal of Geophysical Research*, *107*(C5), 2002.
- Henderson, S. M., and A. J. Bowen, Observations of surf beat forcing and dissipation, *J. Geophys. Res.*, *107*(C11), 2002.
- Henderson, S. M., R. T. Guza, S. Elgar, T. H. C. Herbers, and A. J. Bowen, Nonlinear generation and loss of infragravity wave energy, *J. Geophys. Res.*, *111*(C12007), 2006.
- Herbers, T. H. C., S. Elgar, and R. T. Guza, Generation and propagation of infragravity waves, *J. Geophys. Res.*, *100*(C12), 24863–24872, 1995.
- Hibberd, S., and D. H. Peregrine, Surf and run-up on a beach : a uniform bore, *Journal of Fluid Mechanics*, *95*(2), 323–345, 1979.
- Higman, B., S. Bondevik, J. Borrero, and P. Lynett, Tidal bores as an analog for tsunamis ?, *AGU Abstract*, 2004.
- Holland, T. K., Application of the linear dispersion relation with respect to depth inversion and remotely sensed imagery, *IEEE transactions on geoscience and remote sensing*, *39*(9), 2060–2072, 2001.
- Hsiao, S.-C., and T.-C. Lin, Tsunami-like solitary waves impinging and overtopping an impermeable seawall : Experiment and RANS modeling, *Coastal Engineering*, *57*(1), 1–18, 2010.

- Ioualalen, M., J. Asavanant, N. Kaewbanjak, S. T. Grilli, J. T. Kirby, and P. Watts, Modeling the 26 December 2004 Indian Ocean tsunami : Case study of impact in Thailand, *J. Geophys. Res.*, 112(C07024), 2007.
- Kalisch, H., and M. Bjørkavåg, Energy budget in a dispersive model for undular bores, *Proceedings of the Estonian Academy of Sciences*, 59(2), 172–181, 2010.
- Karambas, T. V., and C. Koutitas, A breaking wave propagation model based on the Boussinesq equations, *Coastal Engineering*, 18(1–2), 1–19, 1992.
- Kennedy, A. B., Q. Chen, J. T. Kirby, and R. A. Dalrymple, Boussinesq modeling of wave transformation, breaking and run-up. I : One dimension., *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 126(1), 48 – 56, 2000.
- Kirby, J. T., and T.-M. Chen, Surface waves on vertically sheared flows : approximate dispersion relations, *Journal of Geophysical Research*, 94(C1), 1013–1027, 1989.
- Kirby, J. T., G. Wei, Q. Chen, A. B. Kennedy, and R. A. Dalrymple, FUNWAVE 1.0. Fully nonlinear Boussinesq wave model. Documentation and user’s manual, *CACR-98-06*, Center for Applied Coastal Research, Department of Civil and Environmental Engineering, University of Delaware, 1998.
- Kobayashi, N., G. De Silva, and K. Watson, Wave transformation and swash oscillation on gentle and steep slopes, *Journal of Geophysical Research*, 94, 951–966, 1989.
- Lannes, D., and P. Bonneton, Derivation of asymptotic two-dimensional time-dependent equations for surface water wave propagation, *Physics of Fluids*, 21(1), 2009.
- Leer, B. van, Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov’s method, *J. Comput. Phys.*, 32, 101–136, 1979.
- Lemoine, R., Sur les ondes positives de translation dans les canaux et sur le ressaut ondulé de faible amplitude, *Houille Blanche*, pp. 183–185, 1948.
- Lin, P., and P. L.-F. Liu, A numerical study of breaking waves in the surf zone, *Journal of Fluid Mechanics*, 359, 239–264, 1998.
- Longuet-Higgins, M. S., and R. W. Stewart, Radiation stress and mass transport in gravity waves, with application to surf beats, *Journal of Fluid Mechanics*, 13, 481–504, 1962.
- Løvholt, F., G Pedersen, and G. Gisler, Oceanic propagation of a potential tsunami from the La Palma Island, *J. Geophys. Res.*, 113(C09026), 2008.

- Lynett, P. J., J. C. Borrero, P. L. F. Liu, and C. E. Synolakis, Field survey and numerical simulations : A review of the 1998 Papua New Guinea Tsunami, *Pure and Applied Geophysics*, 160(10–11), 2119–2146, 2003.
- MacMahan, J. H., E. B. Thornton, and A. J. H. M. Reniers, Rip current review, *Coastal Engineering*, 53(2–3), 191–208, 2006.
- Madsen, P. A., R. Murray, and O. R. Sørensen, A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics, *Coastal Eng.*, 15, 371–388, 1991.
- Madsen, P. A., O. R. Sørensen, and H. A. Schäffer, Surf zone dynamics simulated by a Boussinesq type model. Part I. model description and cross-shore motion of regular waves, *Coastal Engineering*, 32(4), 255–287, 1997.
- Madsen, P. A., D. R. Fuhrman, and H. A. Schäffer, On the solitary wave paradigm for tsunamis, *Journal of Geophysical Research*, 113(C12), 1–14, 2008.
- Marche, F., *Etude théorique et numérique de modèles de type Saint-Venant. Applications à l'hydrodynamique littorale*, Ph.D. dissertation, IMB, Université de Bordeaux 1, 2005.
- Marche, F., P. Bonneton, P. Fabrie, and N. Seguin, Evaluation of well-balanced bore-capturing schemes for 2d wetting and drying processes, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 53(5), 867–894, 2007.
- Masselink, G., Group bound long waves as a source of infragravity energy in the surf zone, *Continental Shelf Research*, 15(13), 1525–1547, 1995.
- Matsuyama, M., M. Ikeno, T. Sakakiyama, and T. Takeda, A study of tsunami wave fission in an undistorted experiment, *Pure and Applied Geophysics*, 164, 617–631, 2007.
- Mignot, E., and R. Cienfuegos, On the application of a Boussinesq model to river flows including shocks, *Coastal Engineering*, 56(1), 23–31, 2009.
- Noorloos, J. C. van, Energy transfer between short wave groups and bound long waves on a plane slope, Master's thesis, Delft University of technology, Delft, The Netherlands, 2003.
- Okamoto, T., and D. Basco, The Relative Trough Froude Number for initiation of wave breaking : Theory, experiments and numerical model confirmation, *Coastal Engineering*, 53, 675–690, 2006.
- Orszaghova, J., A. G. L. Borthwick, and P. H. Taylor, Boussinesq modelling of solitary wave propagation of solitary wave propagation, breaking, runup and overtopping, *Proc. 32nd Int. Conf. Coastal Eng., Shanghai, China*. Retrieved from <http://journals.tdl.org/ICCE/>, vol. 32, 2010.

- Orszaghova, Jana, Alistair G.L. Borthwick, and Paul H. Taylor, From the paddle to the beach - a Boussinesq shallow water numerical wave tank based on Madsen and Sørensen's equations, *Journal of Computational Physics*, *in press*, 2011.
- Pedreiros, R., Delvallée E., S. Lecacheux, Y. Balouin, Garcin M., Krien Y., Le Cozannet G., Poisson B., and Thiebot J., Mise en place d'une approche multi-modèles pour évaluer l'exposition du littoral languedocien aux submersions marines dans un contexte de changement climatique, *Journées "Impacts du Changement Climatique sur les Risques Côtiers"*, Orléans, France, 2010.
- Peregrine, D. H., Calculations of the development of an undular bore, *Journal of Fluid Mechanics*, *25*, 321–330, 1966.
- Peregrine, D. H., Long waves on a beach, *Journal of Fluid Mechanics*, *27*, 815–827, 1967.
- Peregrine, D. H., Breaking waves on beaches, *Annual Review of Fluid Mechanics*, *15*, 149–178, 1983.
- Peregrine, D.H., Surf zone currents, *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, *10*, 295–309, 1998.
- Postacchini, M., A wave-by-wave analysis for the evaluation of the breaking-wave celerity, Internship at Bordeaux University, 2010.
- Raubenheimer, B., R. Guza, and S. Elgar, Wave transformation across the inner surf zone, *Journal of Geophysical Research*, *101*(C11), 25589–25597, 1996.
- Reniers, A. J. H. M., J. H. MacMahan, E. B. Thornton, and T. P. Stanton, Modeling of very low frequency motions during RIPEX, *J. of Geophys. Res.*, *112*(C07013), 2007.
- Roelvink, D., A. Reniers, A. van Dongeren, J. van Thiel de Vries, R. McCall, and J. Lescinski, Modelling storm impacts on beaches, dunes and barrier islands, *Coastal Engineering*, *56*(11–12), 1133–1152, 2009.
- Ruessink, B. G., M. G. Kleinhan, and P. G. L. van den Beukel, Observations of swash under highly dissipative conditions, *J. Geophys. Res.*, *103*(C2), 3111–3118, 1998.
- Ruessink, B. G., T. J. J. Van Den Berg, and L. C. Van Rijn, Modeling sediment transport beneath skewed asymmetric waves above a plane bed, *Journal of Geophysical Research C : Oceans*, *114*(C11021), 2009.
- Schäffer, H. A., P. A. Madsen, and R. Deigaard, A Boussinesq model for waves breaking in shallow water, *Coastal Engineering*, *20*(3–4), 185–202, 1993.

- Sénéchal, N., H. Dupuis, P. Bonneton, H. Howa, and R. Pedreros, Observation of irregular wave transformation in the surf zone over a gently sloping sandy beach on the French Atlantic coastline, *Oceanologica acta*, 324(6), 545–556, 2001.
- Sénéchal, N., H. Dupuis, and P. Bonneton, Preliminary hydrodynamic results of a field experiment on a barred beach, Truc Vert beach on October 2001, *Ocean Dynamics*, 54(3–4), 408–414, 2004.
- Sénéchal, N., P. Bonneton, H. Dupuis, and V. Rey, Determination and impact of the characteristic wave period in wave energy dissipation in the surf zone, *Proceeding Coastal Dynamics*, 2005.
- Sénéchal, N., S. Abadie, F. Ardhuin, E. Gallagher, J. H. M. MacMahan, G. Masselink, H. Michallet, A. J. H. M. Reniers, B. G. Ruessink, P. Russell, D. Sous, I. L. Turner, P. Bonneton, S. Bujan, S. Capo, R. Certain, T. Garlan, and R. Pedreros, The ECORS-Truc Vert08 field beach experiment : Presentation of a three- dimensional morphologic system in a macro-tidal environment during consecutive extreme storm conditions, *Ocean Dynamics*, 2011.
- Serre, F., Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux, *Houille Blanche*, 8, 374–388, 1953.
- Sheremet, A., R. T. Guza, S. Elgar, and T. H. C. Herbers, Observations of nearshore infragravity waves : Seaward and shoreward propagating components, *J. Geophys. Res.*, 107(C8), 2002.
- Shiach, J. B., and C. G. Mingham, A temporally second-order accurate godunov-type scheme for solving the extended Boussinesq equations, *Coastal Engineering*, 56(1), 32–45, 2009.
- Smith, J. A., Wave-current interactions in finite depth, *Journal of Physical Oceanography*, 36, 2006.
- Soares-Frazão, S., and V. Guinot, A second-order semi-implicit hybrid scheme for one-dimensional Boussinesq-type waves in rectangular channels, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 58(3), 237–261, 2008.
- Soares-Frazão, S., and Y. Zech, Undular bores and secondary waves – Experiments and hybrid finite-volume modeling, *Journal of Hydraulic Research, International Association of Hydraulic Engineering and Research (IAHR)*, 40(1), 33–43, 2002.
- Sørensen, O. R., Hemming A. Schaffer, Per A. Madsen, and Rolf Deigaard, Wave breaking and induced nearshore circulations, *24th International Conference on Coastal Engineering*, 2583–2594, 1994.

- Stive, M. J. F., Energy dissipation in waves breaking on gentle slopes, *Coastal Engineering*, 8(2), 99–127, 1984.
- Stocker, J. J., *Water Waves –The Mathematical Theory With Applications*, Interscience Publishers, Inc., 1957.
- Suhayda, J. N., , and N. R. Pettigrew, Observations of wave height and wave celerity in the surf zone, *J. Geophys. Res.*, 82(9), 1419–1424, 1977.
- Svendsen, I. A., P. A. Madsen, and J. Buhr Hansen, Wave characteristics in the surf zone, *Proc. 16th Coastal Engineering Conference*, 520–539, 1978.
- Symonds, G., D. A. Huntley, and A. J. Bowen, Two-dimensional surf beat : Long wave generation by a time-varying breakpoint, *J. Geophys. Res.*, 87(C1), 492–498, 1982.
- Synolakis, C. E., The runup of solitary waves, *Journal of Fluid Mechanics*, 185, 523–545, 1987.
- Thomson, J., S. Elgar, B. Raubenheimer, T. H. C. Herbers, and R. T. Guza, Tidal modulation of infragravity waves via nonlinear energy losses in the surfzone, *Geophys. Res. Lett.*, 33(L05601), 2006.
- Thornton, E. B., and R. T. Guza, Energy saturation and phase speeds measured on a natural beach, *J. Geophys. Res.*, 87(C12), 9499–9508, 1982.
- Ting, F. C. K., and J. T. Kirby, Observations of undertow and turbulence in a laboratory surfzone, *Coastal Engineering*, 24(1–2), 51–80, 1994.
- Ting, F. C. K., and J. T. Kirby Kirby, Dynamics of surf-zone turbulence in a spilling breaker, *Coastal Engineering*, 27(3–4), 131–160, 1996.
- Tissier, M., P. Bonneton, F. Marche, F. Chazel, and D. Lannes, Serre Green-Naghdi modelling of wave transformation breaking and run-up using a high-order finite-volume finite-difference scheme, *Proc. 32nd Int. Conf. on Coastal Eng.*, 1(32), 2010.
- Tissier, M., P. Bonneton, F. Marche, F. Chazel, and D. Lannes, Nearshore dynamics of tsunami-like undular bores using a fully nonlinear Boussinesq model, *Journal of Coastal Research*, SI 64, 2011.
- Tonelli, M., and M. Petti, Hybrid finite volume - finite difference scheme for 2DH improved Boussinesq equations, *Coastal Engineering*, 56(5–6), 609 – 620, 2009.
- Tonelli, M., and M. Petti, Finite volume scheme for the solution of 2D extended Boussinesq equations in the surf zone, *Ocean Engineering*, 37(7), 567 – 582, 2010.

- Treske, A., Undular bores (Favre-waves) in open channels-Experimental studies, *Journal of Hydraulic Research*, 32, 355–370, 1994.
- Tsuji, Y., T. Yanuma, I. Murata, and C. Fujiwara, Tsunami ascending in rivers as an undular bore, *Natural Hazards*, 4(2–3), 257–266, 1991.
- Van Dongeren, A. R., J. A. Battjes, T. T. Janssen, J. van Noorloos, K. Steenhauer, G. Steenbergen, and A. J. H. M. Reniers, Shoaling and shoreline dissipation of low-frequency waves, *Journal of Geophysical Research*, 112(C02011), 2007.
- Van Dongeren, A. R., N. Plant, A. Cohen, D. A. Roelvink, M. C. Haller, and Catalán P. A., Beach Wizard : nearshore bathymetry estimation through assimilation of model computations and remote observations, *Coastal Engineering*, 55(12), 1016–1027, 2008.
- Wei, G., J. T. Kirby, S. T. Grilli, and R. Subramanya, A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. Part 1. Highly nonlinear unsteady waves, *Journal of Fluid Mechanics*, 294, 71–92, 1995.
- Weston, B. P., P. H. Taylor, A. G. L. Borthwick, and A. C. Hunt, Godunov-type Boussinesq modelling of extreme wave run-up, *Shallow Flows : Research Presented at the International Symposium on Shallow Flows, Delft, Netherlands*, pp. 98–403, 2003.
- Whitham, G., *Linear and nonlinear waves*, Wiley, NY, 1974.
- Witting, J. M., A unified model for the evolution of nonlinear water waves, *J. of Comput. Phys.*, 56(2), 203–236, 1984.
- Yasuda, H., One-dimensional study on propagation of tsunami wave in river channels, *Journal of Hydraulic Engineering-ASCE*, 136(2), 2010.
- Zelt, J. A., The run-up of nonbreaking and breaking solitary waves, *Coastal Engineering*, 15(3), 205–246, 1991.
- Zijlema, M., G. Stelling, and P. Smit, SWASH : An operational public domain code for simulating wave fields and rapidly varied flows in coastal waters, *Coastal Engineering, In Press, Corrected Proof*, –, 2011.



# Annexe A

## Résolution de problèmes de Riemann linéaires

### A.1 Définition

On appelle problème de Riemann une équation hyperbolique associée à des conditions initiales constantes par morceaux, avec une seule discontinuité, au point zéro par exemple :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{q}(x, t) + \partial_x (\mathbf{f}(\mathbf{q}(x, t))) = 0, \\ \mathbf{q}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{q}_l & \text{si } x < 0, \\ \mathbf{q}_r & \text{si } x > 0, \end{cases} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

où  $\mathbf{q}$  un vecteur conservatif et  $\mathbf{f}$  la fonction flux physique. Le problème de Riemann est le problème de base pour les méthodes volumes finis. En effet, si  $Q_{i-1}$  et  $Q_i$  sont les moyennes de  $\mathbf{q}$  sur deux cellules consécutives de la grille de volumes finis, alors en résolvant le problème de Riemann pour  $\mathbf{q}_l = Q_{i-1}$  et  $\mathbf{q}_r = Q_i$ , on peut alors calculer la solution du problème hyperbolique pour le pas de temps suivant.

La solution exacte de Riemann est souvent trop coûteuse au niveau du temps de calcul dans le cas des systèmes non-linéaires. On utilise souvent des solveurs de Riemann approchés lors de l'implémentation. Dans le cas des schémas de Roe ou de VFRoe par exemple, on résout un problème de Riemann linéarisé, beaucoup plus facile à résoudre que le système initial. Le paragraphe suivant présente les méthodes de résolution du problème de Riemann dans le cas d'un système hyperbolique linéaire.

### A.2 Résolution dans le cas d'un système hyperbolique linéaire

On considère un système hyperbolique linéaire de la forme :

$$\mathbf{q}_t + A\mathbf{q}_x = 0 \quad (\text{A.2})$$

## A - Résolution de problèmes de Riemann linéaires

---

où  $A$  est une matrice constante réelle de dimension  $m * m$ . Ce système est hyperbolique si  $A$  est diagonalisable à valeurs propres réelles ( $\lambda^p$ ). Dans le cas où les valeurs propres sont différentes, il est dit strictement hyperbolique. On note alors :  $\lambda^1 < \lambda^2 < \dots < \lambda^m$ . Cela signifie que l'on peut écrire  $A$  sous la forme :

$$A = RDR^{-1}$$

où  $R$  est la matrice composée des vecteurs propres. Puis en introduisant la nouvelle variable

$$\mathbf{v} = R^{-1}\mathbf{q}$$

on peut réécrire le système sous la forme :

$$\mathbf{v}_t + D\mathbf{v}_x = 0 \quad (\text{A.3})$$

qui est en fait un système découplé d'équations d'advection. Soit  $\mathbf{q}_0(x)$  la valeur de  $\mathbf{q}(x, t)$  en  $t = 0$ , et  $\mathbf{v}_0(x) = R^{-1}\mathbf{q}_0(x)$ . La  $p^{ieme}$  équation s'écrit (avec  $v^p$  la  $p^{ieme}$  composante du vecteur  $\mathbf{v}$ ) :

$$v_t^p + \lambda^p v_x^p = 0 \quad (\text{A.4})$$

et a pour solution :

$$v^p(x, t) = v^p(x - \lambda^p t, 0) = v_0^p(x - \lambda^p t) \quad (\text{A.5})$$

On peut alors remonter à  $\mathbf{q}$  par la formule suivante :

$$\mathbf{q}(x, t) = \sum_{p=1}^m v^p(x, t)\mathbf{r}^p, \mathbf{r}^p \text{ étant le vecteur propre associé à } \lambda^p \quad (\text{A.6})$$

Si  $\mathbf{q}$  a une discontinuité en  $x_0$ , alors au moins un des  $v^p(x, 0)$  sera discontinu. De telles discontinuités dans les données initiales peuvent alors se propager le long des caractéristiques (cf. (A.6) et (A.5)) et mener à des discontinuités aux points  $x_0 + \lambda^p t$ . Inversement, si  $\mathbf{q}_0$  n'est pas singulière au voisinage de  $x - \lambda^p t$ , alors il en sera de même pour la solution  $\mathbf{q}(x, t)$  au voisinage du point  $(x, t)$ . Les singularités ne peuvent se propager que le long des caractéristiques pour un système linéaire.

Considérons maintenant le problème de Riemann associé à ce système hyperbolique, avec les conditions initiales :

$$\mathbf{q}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{q}_l & \text{si } x < 0, \\ \mathbf{q}_r & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

On décompose  $\mathbf{q}_l$  et  $\mathbf{q}_r$  de la façon suivante :

$$\mathbf{q}_l = \sum_{p=1}^m v_l^p \mathbf{r}^p \text{ et } \mathbf{q}_r = \sum_{p=1}^m v_r^p \mathbf{r}^p \quad (\text{A.7})$$

Les conditions initiales de l'équation (A.4) s'écrivent :

$$\begin{aligned} v^p(x, 0) &= v_l^p \text{ si } (x < 0) \\ &= v_r^p \text{ si } (x > 0) \end{aligned}$$

## A.2 - Résolution dans le cas d'un système hyperbolique linéaire

---

et comme la discontinuité se propage à la vitesse  $\lambda^p$ , on a :

$$\begin{aligned}v^p(x, t) &= v_l^p \text{ si } (x - \lambda^p t < 0) \\ &= v_r^p \text{ si } (x - \lambda^p t > 0)\end{aligned}$$

que l'on peut écrire de manière plus concise :

$$\mathbf{q}(x, t) = \sum_{x/t > \lambda^p} v_r^p \mathbf{r}^p + \sum_{x/t < \lambda^p} v_l^p \mathbf{r}^p. \quad (\text{A.8})$$



## Annexe B

Article publié dans *Journal of Coastal Research*

# Nearshore Dynamics of Tsunami-like Undular Bores using a Fully Nonlinear Boussinesq Model

M. Tissier<sup>†</sup>, P. Bonneton<sup>†</sup>, F. Marche<sup>‡</sup>, F. Chazel<sup>∞</sup> and D. Lannes<sup>§</sup>

<sup>†</sup> UMR CNRS 5805 EPOC - OASU, Université de Bordeaux 1, Talence F-33405, France  
m.tissier@epoc.u-bordeaux1.fr  
p.bonneton@epoc.u-bordeaux1.fr

<sup>‡</sup> UMR CNRS 5149, Université de Montpellier 2, Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier, France  
fmarche@math.univ-montp2.fr

<sup>∞</sup> UPS/INSA, IMT, CNRS UMR 5219, F-310077 Toulouse, France  
florent.chazel@insa-toulouse.fr

<sup>§</sup> DMA, Ecole Normale Supérieure, CNRS UMR 8553, 45 rue d'Ulm, F-75005 Paris, France  
David.Lannes@ens.fr



## ABSTRACT

Tissier, M., Bonneton, P., Marche, F., Chazel, F. And Lannes, D., 2011. Nearshore dynamics of tsunami-like undular bore using a fully nonlinear Boussinesq model. Journal of Coastal Research, SI 64 (Proceedings of the 11th International Coastal Symposium), 825 – 829. Szczecin, Poland, ISSN 0749-0208

When tsunami wave fronts reach the shore, they can evolve into a large range of bore types, from undular non-breaking bore to purely breaking bore. It is the complex competition between nonlinear effects, dispersive effects and energy dissipation which governs their transformations, making the prediction of their evolution a challenging task for numerical models. In this paper we investigate the ability of a fully nonlinear Boussinesq model, SURF-WB, to predict bore dynamics for a large range of Froude numbers. The model is first applied to the formation of undular bores and further compared with laboratory data. Its ability to predict the different bore shapes is then investigated. Finally, the effects of the bore transformation on wave run-up over a sloping beach are considered.

**ADDITIONAL INDEX WORDS:** *Undular bore, hydraulic jump, Froude number, run-up, dispersive effects, Green-Naghdi equations.*

## INTRODUCTION

Tsunamis propagating in the open ocean are basically non dispersive long waves. However, the integration of weak dispersive effects can become significant when the propagation takes place over a long time, and end up modifying the tsunami waves (Løvholt *et al.* 2008, Dalrymple *et al.* 2006). Dispersive effects finally become significant in shallow-water regions (see Lynett *et al.* 2003, Grue *et al.* 2008). In the nearshore, the competition between energy dissipation, nonlinear and dispersive effects governs the transformation of tsunami wave fronts. They can evolve into a large range of bore types, from undular non-breaking bore to purely breaking bore. For instance, during the 1983 Japan Sea tsunami, tsunami-made waves traveled upstream different rivers, evolving into breaking bores either followed or not by an undulated wave train (Tsuji *et al.*, 1990). The propagation of tsunami waves in river channels was also studied by Yasuda (2010) who applied a Boussinesq-type model to undular bores resulting from the September 2003 Tokachi-oki tsunami. The natural disaster caused by the 26 December 2004 Indian Ocean Tsunami has led to numerous studies, with emphasis on the potential generation of disastrous flood waves. During this event, undular bores were observed in the Strait of Malacca. Video recordings showing the run-up of 15 to 20 s period waves associated with this undular bore motivated a recent study by Grue *et al.* (2008). They studied numerically how the initial tsunami wave can turn into an undular bore while propagating along this shallow strait. They showed that the formation of undulations leads to a significant increase of surface elevations, and that all the individual elevation waves could ultimately develop into solitary waves. Of note, wave breaking was not taken into account in these

studies despite it is suspected to significantly affect the transformation of the undular bore while propagating shoreward. The prediction of bore transformations in the nearshore is therefore a difficult task, and one crucial new step to undertake is accounting for wave breaking to better understand tsunami run-up and impact on coastal structures.

Laboratory experiments (among others Favre, 1935, Treske, 1994, Chanson 2009) showed that the wave Froude number  $Fr$  controls the bore shape. In the supercritical regime ( $Fr > \approx 1.4$ ), the bore consists of a steep front, while undulations start developing at the bore front in the near-critical state ( $Fr \approx 1$ ). The transition between these states is still poorly understood, and can become very complex for coastal applications with evolving bathymetries. As it involves the complex interaction between nonlinear, dispersive and dissipation effects, the description of the different bore types is a very challenging test case for numerical models. To our knowledge, previous numerical studies concerning bore dynamics using depth-averaged models were devoted to either purely breaking bores, or non-breaking undular bores. Breaking hydraulic bores are traditionally solved using shock-capturing models based on nonlinear shallow-water equations (see Brocchini and Dodd, 2008), while test cases concerning undular bores have been used to validate several Boussinesq-type models (*e.g.* Wei *et al.*, 1995, Soares-Frazao and Zech, 2008). Recently, Mignot *et al.* (2009) investigated the ability of a fully-nonlinear Boussinesq model to describe river flows including shocks. They showed that their model was able to reproduce the overall wave front dynamics, but highlighted some potential drawbacks of their viscous-like breaking model for riverine applications including shocks.

In this study, we assess the ability of the one-dimensional (1D) Fully Nonlinear Boussinesq model introduced in Bonneton *et al.* (2010a,b) and Tissier *et al.* (2010) to predict bore dynamics for a large range of Froude numbers. This model has been developed as an extension of the shock-capturing shallow-water model SURF-WB (Marche *et al.*, 2007), using hybrid finite-volume finite-difference schemes. The numerical strategy was developed such as it preserves the initial properties of SURF-WB concerning its natural treatment of wave breaking (see Bonneton *et al.*, 2010a). The model is briefly described in the first section. Undular bore development and evolution are studied in the next section, using experimental data. We then study the transition from one type of bore to another, and we evaluate the hydrodynamical conditions that control the transition for idealized cases. Finally, the run-up of an undular bore over a sloping beach is considered and compared to the predictions given by a nonlinear shallow water model.

## NUMERICAL MODEL

In this section we briefly present the main characteristics of our numerical model. The reader is referred to Bonneton *et al.* (2010a) and Chazel *et al.* (2010) for further details.

### Governing equations

The model is based on the Serre Green-Naghdi (S-GN) equations, considered as the basic fully nonlinear weakly dispersive equations (Lannes and Bonneton, 2009). These equations can be formulated in terms of the conservative variables  $(h, h\mathbf{v})$  in the following nondimensionalized form (see Bonneton *et al.*, 2010a):

$$\begin{cases} \partial_t h + \varepsilon \nabla \cdot (h\mathbf{v}) = 0 \\ \partial_t (h\mathbf{v}) + gh \nabla \zeta + \varepsilon \nabla \cdot (h\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = -\mu D, \end{cases} \quad (1)$$

where  $\zeta$  is the surface elevation,  $h=1+\varepsilon\zeta$  the water depth,  $b$  the variation of the bottom topography and  $\mathbf{v} = (u, v)$  the depth averaged velocity.  $\varepsilon = H/h_0$  is the non-linear parameter with  $H$  the wave height and  $h_0$  the typical water depth, and  $\mu = (h_0/\lambda)^2$ , with  $\lambda$  the wave length.  $D$  characterizes non-hydrostatic and dispersive effects, and has been written such as it does not require the computation of any third order derivative. It is noteworthy that if  $D = 0$ , we obtain the Nonlinear Shallow Water Equations (NSWE) in their conservative form. The formulation is therefore well-suited for a splitting approach separating the hyperbolic (NSW) and dispersive parts of the equations, allowing an easy coupling of the sets of equations. The strategy for wave breaking is based on the ability of the NSWE to describe naturally breaking waves. Non-breaking waves are described by the S-GN equation, whereas breaking waves are governed locally by the NSW equations.

### Numerical strategy

At each time step  $dt$ , we decompose the solution operator  $S(\bullet)$  associated to the equations (1) using the following second order splitting scheme:

$$S(dt) = S1(dt/2)S2(dt)S1(dt/2), \quad (2)$$

where  $S1$  and  $S2$  are associated to the hyperbolic and dispersive parts of the S-GN equations, respectively.  $S1$  is treated using a finite-volume method, while  $S2$  is treated using a classical finite-difference method.

The numerical methods used in  $S1$  are those developed in the extensively-validated NSW code SURF-WB (Marche *et al.*, 2007, Berthon and Marche, 2008). It is based on high-order positive preserving well-balanced shock-capturing schemes. They are able to handle breaking bore propagation without any parameterization

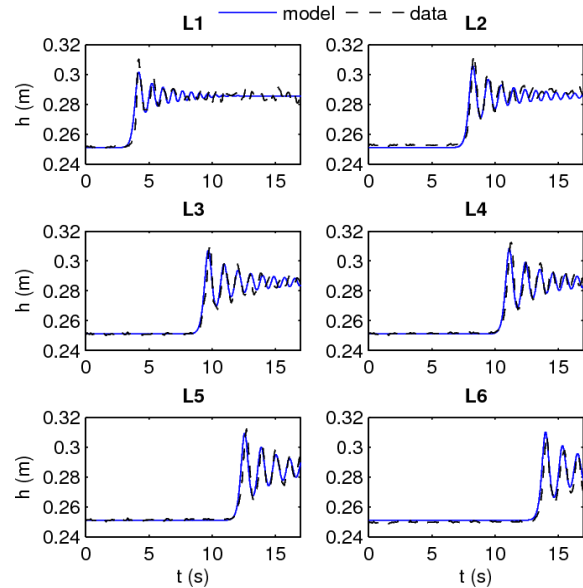


Figure 1. Water level evolution as a function of time at 6 gauges. Comparisons between experimental data (dashed lines) from Soares-Frazao and Zech (2002) and model prediction (plain lines).  $Fr = 1.104$ ,  $u_0 = 0$ ,  $d_0 = 0.251$  m.

of the energy dissipation, as well as moving shorelines without any tracking method.

### Wave breaking

When the wave is ready to break, we switch locally from S-GN equations to NSWE by skipping the step  $S2$  in the vicinity of the front. Energy dissipation due to wave breaking is then predicted by the shock theory, and no complex ad-hoc parameterization is required.

The following method is used to determine where to suppress the dispersive term at each time step. We first compute the local energy dissipation  $Di(x, t)$  during the first step  $S1$ , and integrate it over each wave front. After normalization by the theoretical dissipation across a shock,  $D_{th}$ , this parameter is used to characterize the wave fronts. Indeed, the normalized dissipation  $\int_{front} Di(x, t) dx / D_{th}$  is close to one for fully broken waves, and close to zero for non-breaking waves. We also compute the front slope  $\Phi$  at the end of  $S1$ , and define two threshold values,  $\Phi_i$  and  $\Phi_t$ , corresponding to the initiation and termination of breaking (Schäffer *et al.*, 1993). We choose  $\Phi_i = 30^\circ$  and  $\Phi_t = 8^\circ$ , which are the optimal angles determined by Cienfuegos *et al.* (2010) in their S-GN model. Finally, we switch from one set of equations to the other for a given wave front depending on the values of these two parameters (Tissier *et al.*, 2010). If  $\int_{front} Di(x, t) dx / D_{th} \leq 0.5$  and  $\Phi < \Phi_i$ , the wave is not breaking. The propagation is governed by S-GN equations. If  $\Phi$  gets larger than  $\Phi_i$ , we switch from GN to NSWE and the wave breaks. If  $\int_{front} Di(x, t) dx / D_{th} > 0.5$  and  $\Phi > \Phi_t$ , the wave is broken and will keep breaking as long as  $\Phi > \Phi_t$ . The wave front is locally governed by NSWE.

This model was successfully applied to the shoaling and breaking of periodic waves on sloping beaches, which correspond to breaking bores with high values of the Froude number. The model was also validated for the description of shoreline motions, showing a very good agreement with laboratory data. In the next section, we assess the ability of our model to describe bore dynamics for moderate Froude numbers (close to unity).

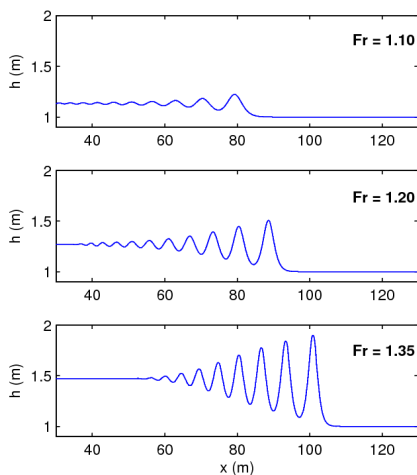


Figure 2. Free surface profiles at  $t = 24$  s of hydraulic bores with Froude numbers varying from 1.10 to 1.35.  $u_a = 0$ ,  $d_a = 1$  m.

### FROM UNDULAR TO BREAKING HYDRAULIC BORE

#### Development of an Undulated Wave Train

Pioneering experimental works concerning the development of undular bores were performed by Favre (1935), who studied their formation due to a rapid opening or closure of a gate. Similar experiments were conducted by Soares-Frazão and Zech (2002), and studied numerically in Soares-Frazão and Guinot (2008). These experimental data are used here to validate our S-GN model. For this experiment, we consider a channel initially at rest with an initial water height  $d_0 = 0.25$  m. At  $t = 0$  s, we impose a discharge at the gate  $Q_0 = 0.06 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ . The Froude number of the resulting bore is  $Fr = 1.104$ . For the simulations, the grid size of the mesh is  $dx = 0.2$  m and we consider a Courant number ( $cdt/dx$ ) of 0.9. Figure 1 compares experimental and numerical time-series of water elevation at the wave gauges. It shows that the model predicts accurately the bore celerity, and that the agreement is good in terms of amplitude and wavelength of the secondary waves. It can be noticed that the growth of the first wave is faster in the experiments than predicted by our numerical model. The same discrepancy was observed by Soares-Frazão and Guinot (2008) with their Boussinesq model.

#### Transition from Undular to Purely Breaking Bore

We consider in this section the transformations of an initial step over a flat bottom defined by:

$$\begin{cases} h(x,0) = \frac{1}{2} (d_b - d_a) (1 - \tanh(x/a)) + d_a, \\ v(x,0) = \frac{1}{2} (u_b - u_a) (1 - \tanh(x/a)) + u_a, \end{cases} \quad (3)$$

for Froude numbers varying from 1.10 to 1.90.  $d_a$  and  $d_b$  are the water depth in front and behind the bore,  $u_a$  and  $u_b$  the corresponding depth-averaged velocities. We set  $u_a = 0$  (channel initially at rest),  $d_a = 1$  m and  $a = 2$  m. For each Froude number,  $d_b$  and  $u_b$  are deduced from the mass and momentum conservation conditions across the bore. Figure 2 and 3 show the bore shapes at  $t = 24$  s for the different Froude numbers.

For  $Fr < 1.40$ , the initial step evolves into an undular jump. We observe that the secondary wave wavelength decreases with increasing Froude number, while the amplitude increases (see

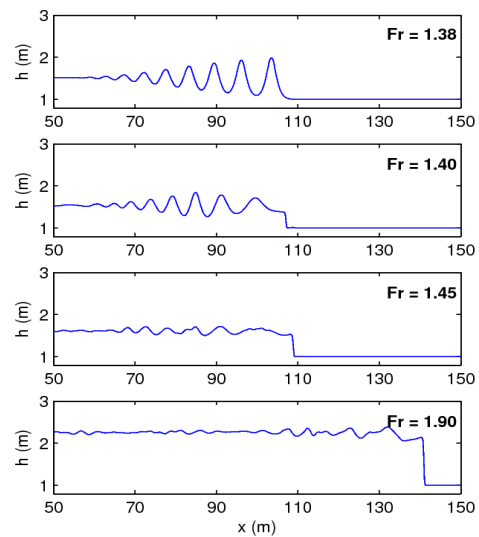


Figure 3. Free surface profiles at  $t = 24$  s of hydraulic bores with Froude numbers varying from 1.38 to 1.90.  $u_a = 0$ ,  $d_a = 1$  m.

Figure 2). This is a well-known result which has been for instance presented in Treske (1994) or Chanson (2009). For  $Fr = 1.40$ , a wave train is again formed but the first wave is broken. Although the first wave seems too damped in comparison with experimental results, the overall shape is qualitatively well-reproduced (see for instance the bore pictures from Treske (1994), or the longitudinal profiles from Binnie and Orkney (1955)). For higher Froude numbers, we obtain a purely breaking bore. It can be observed that some disturbances occur behind the breaking fronts. Their physical relevance still needs to be explored.

A review of the recent experimental results concerning hydraulic bores is given in Chanson (2009). He observed that the wave amplitude data showed a local maximum value for  $Fr = 1.27$  to 1.7, depending upon experimental conditions such as the channel width, and that the undulated wave train was disappearing for  $Fr = 1.5$  to 3. Our model predicts that the maximum amplitude of the secondary waves is obtained for  $Fr = 1.38$ , and the transition to a purely breaking bore starts for  $Fr = 1.40$ , which is therefore in good agreement with experimental data.

### RUN-UP OF AN UNDULAR BORE OVER A PLANAR BEACH

In the previous sections we have shown that our S-GN model is able to reproduce accurately the main features of different bore types. Hereafter, we consider the effects on wave run-up of the transformation of an initial soliton into an undular bore. In order to quantify the importance of dispersive effects for these transformations, we also compute the evolution of the same initial wave without considering the dispersive effects, *i.e.* solving only the NSW part of the equations (same code but considering  $D = 0$ , see Equation (1)). The computations without dispersive effects are represented by the dashed lines in Figures 4 to 6.

Madsen *et al.* (2008) studied how a long wave can disintegrate into an undular bore close to the beach. In order to obtain a realistic undulated incoming wave for our run-up simulation, we first perform a computation similar to the one presented in Madsen *et al.* (2008). We consider the evolution of a long wave reaching a shallow flat region where non-linearity is significant. The input wave is a  $\sin^2$  wave with amplitude  $a_0 = 2.0$  m and period  $T = 780$  s propagating over a constant depth  $h_0 = 20$  m. The wave



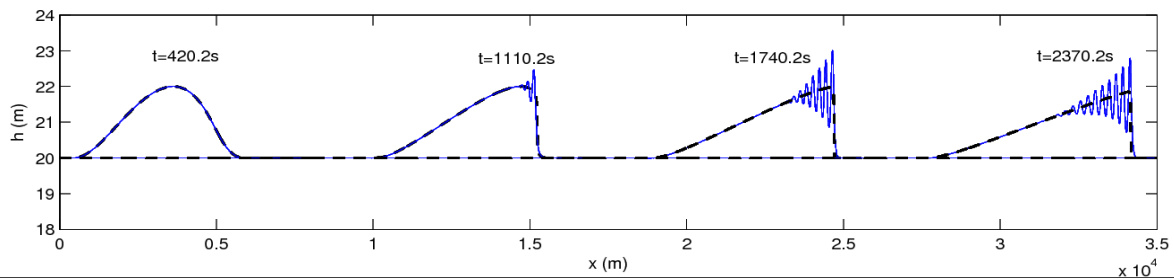


Figure 4. Disintegration of a long wave ( $a_0 = 2\text{ m}$ ,  $T = 780\text{ s}$ ) propagating over a flat bottom with  $h_0 = 20\text{ m}$ . Plain lines: computed with our S-GN model. Dashed lines: NSW model.

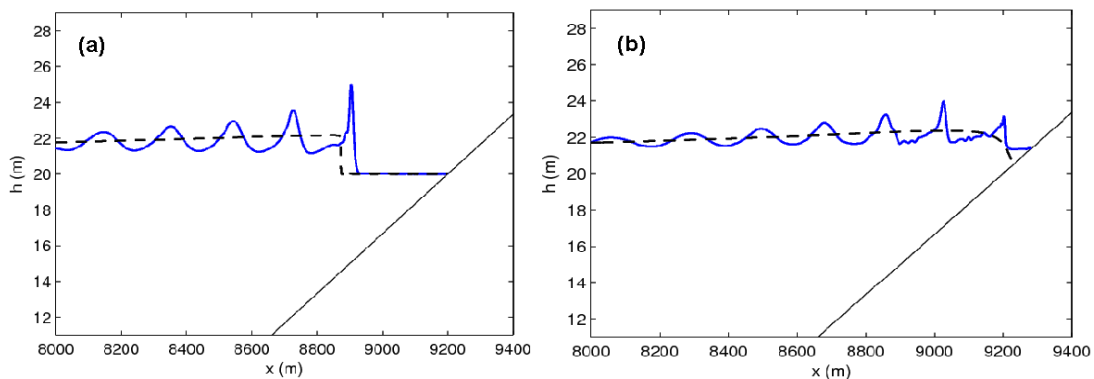


Figure 5. Propagation of the undular bore over a sloping beach (a) At  $t = t_0 + 124.25\text{ s}$ ; (b) At  $t = t_0 + 166.25\text{ s}$ . Plain lines: S-GN model. Dashed lines: NSW model.

characteristics were chosen to match the observations during the 2004 Indian Ocean tsunami.

The wave profiles at different times are represented in Figure 4, with and without dispersive effects. The S-GN model predicts the formation of an undulated wave train, which starts developing at the wave front. After propagating 2370.2 s, the resulting wave is about 1.5 times higher than the one predicted by the NSW model. The individual elevation waves could eventually evolve into solitary waves if they were propagating for a sufficient duration in shallow water, but, according to Madsen *et al.* (2008), it rarely happens because of geophysical constraints. This case is therefore not considered in this study, and we use the wave profiles at  $t = 2370.2\text{ s}$  (see Figure 4) as the initial conditions for the run-up simulations.

At  $t = 0$ , the undular bore is located at the toe of a 1:60 sloping beach. For the simulation, the grid size of the mesh is  $dx = 1\text{ m}$  and the time step  $dt = 0.07\text{ s}$ . Figure 5 shows the transformation of the bore as it propagates shoreward, during shoaling (a), and breaking (b). The wave height predicted with the S-GN model just before breaking (see Figure 5b) is about 2.3 times the wave height obtained without dispersive effects. Figure 6 compares the time-evolution of the run-up predicted by the S-GN code and the NSW code. Not taking into account dispersive effects (no secondary waves develop) causes a run-up underestimate of 11%. It seems to confirm what has been hypothesized by Madsen *et al.* (2008), that is to say that the development of shorter waves riding on the top of the tsunami is not the major factor controlling the run-up. However, the significant elevation raise of the main front will certainly have a local effect on tsunami wave impact on coastal structures, and is therefore an important feature.

## CONCLUSIONS

In this paper, we investigated the ability of the fully nonlinear Boussinesq model SURF-WB (Bonneton *et al.* (2010a,b), Chazel *et al.* (2010) and Tissier *et al.* (2010)) to predict bore dynamics for a large range of Froude numbers. Promising results were found concerning the ability of our model to reproduce the transition from purely undular bore to strongly breaking bore. Despite our highly-idealized simulations (no friction effects, cross-shore model) the characteristic Froude number for the transition ( $Fr = 1.40$ ) was close to the typical values obtained during laboratory experiments (*e.g.* Treske, 1994). To our knowledge, SURF-WB is the first Boussinesq-type model able to reproduce this transition, which is a challenging task since it involves the complex interaction between nonlinear effects, dispersive effects and energy dissipation.

Finally, the transformation of an undulated wave while propagating over a 1:60 sloping beach was considered. For this simulation, the maximum wave height predicted with our S-GN model was up to 2.3 times the one predicted by the NSW part of the code only, *i.e.* without accounting for the dispersive terms of the equations. The run-up was computed in both cases and compared. We showed that the main characteristics of the run-up were well-reproduced by the NSW code only, with an underestimation of the maximum run-up of about 11%. The run-up is therefore mainly determined by the main tsunami wave and not by the short waves riding on the top of the tsunami. This result is in agreement with Madsen *et al.* (2008), who suggested that the effect on wave run-up of the disintegration of tsunami waves while propagating shoreward was often overestimated. However, the modeling of this transformation remains important, since the

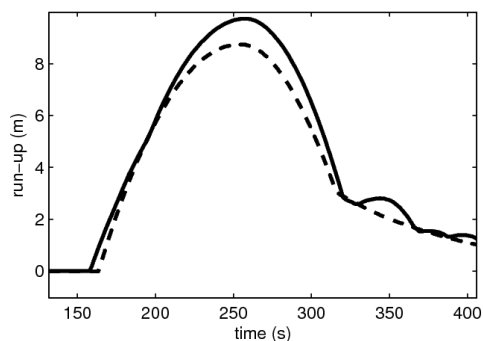


Figure 6. Run-up of the undular tsunami on the sloping beach (plain line) computed by our S-GN model. Dashed-line: same simulation without dispersive effects.

formation of secondary waves, and the subsequent increase of the tsunami front height, is likely to have an a significant impact on coastal structures.

Recent intensive high temporal and spatial resolution field works on the dynamics of tidal bores (Bonneton *et al.*, 2011) will give us a new opportunity to validate our model, since tidal bores exhibit similar behaviors as tsunami waves propagating in shallow-water estuaries.

#### LITERATURE CITED

- Berthon, C. and Marche, F., 2008. A positive preserving high order VFRoe scheme for shallow water equations : A class of relaxation schemes. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 30(5), 2587-2612.
- Binnie, A. M. and Orkney, J. C., 1955. Experiments on the flow of water from a reservoir through an open horizontal channel. II. The formation of hydraulic jumps. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 230 (1181), pp. 237-246.
- Bonneton, P., Chazel, F., Lannes, D., Marche, F. and Tissier, M., 2010a. A splitting approach for the fully nonlinear and weakly dispersive Green-Naghdi model, *Journal of Computational Physics*, in press.
- Bonneton, P., Barthélemy, E., Chazel, F., Cienfuegos, R., Lannes, D., Marche, F., and Tissier, M., 2010b. Fully nonlinear weakly dispersive modelling of wave propagation, breaking and run-up, in *correction to European Journal of Mechanics, B/Fluids*.
- Bonneton, P., Van de Loock, J., Parisot, J-P., Bonneton, N., Sottolichio, A., Detandt, G., Castelle, B., Marieu, V. and Pochon, N., 2011. On the occurrence of tidal bores – The Garonne River case. *Journal of Coastal Research*, SI 64.
- Brocchini M. and Dodd, N., 2008. Nonlinear Shallow Water Equation Modeling for Coastal Engineering, *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Eng.*, 134(2), 104-120.
- Cienfuegos, R., Barthélemy, E., and Bonneton, P., 2010. A wave-breaking model for Boussinesq-type equations including roller effects in the mass conservation equation. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Eng.*, 136(1), 10-26.
- Chanson, H., 2009. "Current Knowledge In Hydraulic Jumps And Related Phenomena. A Survey of Experimental Results. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 28 (2), pp. 191-210.
- Chazel, F., Lannes, D. and Marche, F., 2010. Numerical simulation of strongly nonlinear and dispersive waves using a Green-Naghdi model. *Journal of Scientific Computing*, DOI: 10.1007/s10915-010-9395-9.
- Dalrymple, R.A., Grilli, S.T., Kirby, J.T., 2006. Tsunamis and challenges for accurate modeling, *Oceanography*, 19/1, 142-151.
- Grue, J. , Pelinovsky, E. N., Fructus, D., Talipova, T. and Kharif, C., 2008. Formation of undular bores and solitary waves in the Strait of Malacca caused by the 26 December 2004 Indian Ocean tsunami. *Journal of Geophysical Research*, 113 (C05008).
- Lannes, D. and Bonneton, P., 2009. Derivation of asymptotic two-dimensional time-dependent equations for surface water wave propagation. *Physics of Fluids*, 21(1).
- Løvholt, F., Pedersen, G. and Gisler, G., 2008. Oceanic propagation of a potential tsunami from the La Palma Island. *Journal of Geophysical Research*, 113 (C09026)
- Lynett, P.J., Borrero, J.C., Liu, P.L.-F. and Synolakis, C.E., 2003. Field Survey and Numerical Simulations: A Review of the 1998 Papua New Guinea Earthquake and Tsunami. *Pure and Applied Geophysics*, 160 (10-11), 2119 – 2146.
- Madsen, P. A., Fuhrman, D. R. and Schäffer, H. A., 2008. On the solitary wave paradigm for tsunamis. *Journal of Geophysical Research*, 113 (C12012).
- Marche, F., Bonneton, P., Fabrie, P., Seguin, N., 2008. Evaluation of well-balanced bore-capturing schemes for 2D wetting and drying processes, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 53(5), 867–894.
- Mignot, E. and Cienfuegos, R., 2009. On the application of a Boussinesq model to river flows including shocks. *Coastal Engineering*, 56 (1), 23–31.
- Schäffer, H.A., Madsen, P. A. and Deigaard, R., 1993. A Boussinesq model for waves breaking in shallow water. *Coastal Engineering*, 20, 185-202.
- Soares-Frazão S. and Zech Y., 2002. Undular bores and secondary waves – Experiments and hybrid finite-volume modeling. *Journal of Hydraulic Research, International Association of Hydraulic Engineering and Research (IAHR)*, 40 (1), 33-43.
- Soares-Frazão S., Guinot V., 2008. A second-order semi-implicit hybrid scheme for one-dimensional Boussinesq-type waves in rectangular channels. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 58(3), 237–261.
- Tissier, M., Bonneton, P., Marche, F., Chazel, F. and Lannes, D., 2011. Serre Green-Naghdi modeling of wave transformation breaking and run-up using a high-order finite-volume finite-difference scheme. *Proc. Int. Conf. Coastal Eng.*, No.32(2010), Shanghai, China. Retrieved from <http://journals.tdl.org/ICCE/>.
- Treske A., 1994. Undular bores (Favre Waves) in Open Channels – Experimental Studies. *J. Hydr. Research*, 32(3), 355-370.
- Tsuji, Y., Yanuma, T., Murata, I. and Fujiwara, C., 1990. Tsunami ascending in rivers as an undular bore. *Natural Hazards*, 4 (2-3), 257-266.
- Wei, G., Kirby, J. T., Grilli, S. T. and Subramanya, R., 1995. A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. I. Highly nonlinear, unsteady waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 294, 71-92.
- Yasuda, H., 2010. One-Dimensional Study on Propagation of Tsunami Wave in River Channels. *J. Hydr. Engrg.* Volume 136 (2), 93-105.
- Zhang, Q. and Liu, L.-F., 2010. One-Dimensional Study on Propagation of Tsunami Wave in River Channels, *J. Hydr. Engrg.* 136 (2), 93-105.

#### ACKNOWLEDGEMENT

This work has been supported by the ANR MathOcean. The Ph.D. thesis work of M. Tissier is funded by MISEEVA (ANR). The authors are grateful to S. Soares-Frazão for providing the experimental data. The authors acknowledge V. Marieu for his helpful assistance.

## Annexe C

Proceeding ICCE 2010, Shanghai,  
China

# SERRE GREEN-NAGHDI MODELLING OF WAVE TRANSFORMATION BREAKING AND RUN-UP USING A HIGH-ORDER FINITE-VOLUME FINITE-DIFFERENCE SCHEME

Marion Tissier<sup>1</sup>, Philippe Bonneton<sup>1</sup>, Fabien Marche<sup>2</sup>, Florent Chazel<sup>3</sup> and David Lannes<sup>4</sup>

In this paper, a fully nonlinear Boussinesq model is presented and applied to the description of breaking waves and shoreline motions. It is based on Serre Green-Naghdi equations, solved using a time-splitting approach separating hyperbolic and dispersive parts of the equations. The hyperbolic part of the equations is solved using Finite-Volume schemes, whereas dispersive terms are solved using a Finite-Difference method. The idea is to switch locally in space and time to NSWE by skipping the dispersive step when the wave is ready to break, so as the energy dissipation due to wave breaking is predicted by the shock theory. This approach allows wave breaking to be handled naturally, without any ad-hoc parameterization for the energy dissipation. Extensive validations of the method are presented using laboratory data.

*Keywords: Fully nonlinear Boussinesq equations; Wave breaking; Run-up; Hybrid method; Shock capturing schemes;*

## INTRODUCTION

Wave transformation in shallow water, and associated processes such as wave-breaking and run-up, play a key role in the nearshore dynamics. Breaking waves and swash motions are the main source of sediment transport in the nearshore. A good estimation of instantaneous wave characteristics, as its steepening and asymmetry is needed to improve the prediction of short-term beach evolution. It is of great interest during storm events, where a given wave can have a significant impact on the coastline. A wave-by-wave approach is also necessary for the study of coastal flooding due to storm waves or tsunamis. Modelling these processes requires a phase-resolving model, able to accurately describe wave-breaking and run-up over strongly varying topographies. The most accurate models for the description of wave breaking are based on the Navier-Stokes equations. However, they are highly computationally demanding, and therefore are not suitable for large scale propagation applications. For this reason, phase-resolving models based on shallow-water equations are still attractive to handle these processes. They are based on Nonlinear Shallow Water (NSWE) or Boussinesq-type (BT) equations.

NSWE models can give a good description of broken-waves, represented as shocks. The use of shock-capturing techniques allows for an accurate representation of broken wave dissipation and swash oscillations without any ad hoc parameterization (Kobayashi et al. 1989, Bonneton 2007, Marche et al. 2007, Brocchini and Dodd 2008). However, since dispersive effects are not taken into account, these equations are restricted to the inner surf and swash zones, where nonlinearities predominate. On the other hand, BT equations account for both nonlinear and dispersive effects at different degrees of accuracy. In the final stages of shoaling and in the surf and swash zones, the wave dynamics is strongly nonlinear. Fully Nonlinear BT equations are required. However, they do not intrinsically include energy dissipation due to wave breaking. They can accurately predict non-breaking wave transformation, including shoaling but they become invalid in the surf zone. Several attempts have been made to introduce wave breaking in Boussinesq models by the mean of ad hoc techniques, which require the prior estimation of empirical parameters (e.g. Madsen et al. 1997, Kennedy et al. 2000, Cienfuegos et al. 2009). FUNWAVE is a well-known example of this kind of models. It gives a good description of wave transformation, but each use of the model implies the prior tuning of several parameters, as the ones determining wave breaking and run-up (see Bruno et al. 2009).

The modelling strategy developed in this paper is based on a coupling of the approaches: breaking waves will be described as shocks by the NSW equations, whereas non-breaking waves will be described

---

<sup>1</sup> Université de Bordeaux 1, CNRS, UMR 5805-EPOC, Talence F-33405, France

<sup>2</sup> Université de Montpellier 2, UMR CNRS 5149, Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier, France

<sup>3</sup> INSA – Département GMM, 135 avenue de Rangueil, F-31077 Toulouse Cedex 4, France

<sup>4</sup> DMA/CNRS, Ecole Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, 75005 Paris, France

by Boussinesq equations. The model is based on the Serre Green-Naghdi (S-GN) equations, which are the basic Fully Nonlinear Boussinesq equations (Lannes and Bonneton 2009). They can be written as a hyperbolic part, corresponding to the NSW equations, plus a dispersive term. We present here an hybrid finite-volume finite-difference method (Chazel et al. 2010 and Bonneton et al 2010a) which permits to naturally handle wave breaking. The idea is to switch from one set of equations to the other, locally, by skipping the dispersive term when the wave is ready to break. Thus, wave breaking is handled by the NSW equations, and wave energy dissipation due to wave breaking described by the shock theory, without any parameterization.

## GOVERNING EQUATIONS

The model is based on the S-GN equations, which are now recognized to be the relevant system to model highly nonlinear weakly dispersive waves propagating in shallow water (see Lannes and Bonneton 2009). These equations can be formulated in term of the conservative variables  $(h, h\mathbf{v})$  in the following nondimensionalized form (see Bonneton et al. 2010a):

$$\begin{cases} \partial_t h + \varepsilon \nabla \cdot (h\mathbf{v}) = 0 \\ \partial_t (h\mathbf{v}) + gh \nabla \zeta + \varepsilon \nabla \cdot (h\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = -D, \end{cases} \quad (1)$$

where  $\zeta(\mathbf{x}, t)$  is the surface elevation,  $h(\mathbf{x}, t) = 1 + \varepsilon \zeta - b$  the water depth,  $b(\mathbf{x})$  the variation of the bottom topography,  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = (u, v)$  the depth averaged velocity.  $\varepsilon = H/h_0$  is the non-linear parameter with  $H$  the wave height and  $h_0$  the typical water depth, and  $\mu = (h_0/\lambda)^2$  the dispersive parameter, with  $\lambda$  the typical wave length.  $D$  characterizes non-hydrostatic and dispersive effects and writes:

$$D = -\frac{1}{\alpha} h \nabla \zeta + \left( I + \mu \alpha h T[h, b] \frac{1}{h} \right)^{-1} \left[ \frac{1}{\alpha} h \nabla \zeta + \varepsilon \mu h Q_1[h, b](\mathbf{v}) \right], \quad (2)$$

where the linear operator  $T[h, b]$  is defined as:

$$T[h, b]W = -\frac{1}{3h} \nabla (h^3 \nabla \cdot W) + \frac{1}{2h} \left[ \nabla (h^2 \nabla b \cdot W) - h^2 \nabla b \nabla \cdot W \right] + \nabla b \nabla b \cdot W,$$

and  $Q_1[h, b]$  is given by:

$$Q_1[h, b](\mathbf{v}) = \frac{1}{2h} \left[ \nabla (h^2 (\mathbf{v} \cdot \nabla)^2 b) - h^2 ((\mathbf{v} \cdot \nabla)(\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\nabla \cdot \mathbf{v})^2) \nabla b \right] + ((\mathbf{v} \cdot \nabla)^2 b) \nabla b - T[h, b]((\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}).$$

The range of validity of the set of equations has been extended to deeper water using the dispersion correction technique discussed in Cienfuegos et al 2006, Chazel et al 2010.  $\alpha$  is the resulting optimization parameter and should be taken equal to 1.159 in order to minimize the phase and group velocity errors in comparison with the linear Stokes theory.

The proposed reformulation has two important advantages. First of all, the dispersive term does not require the computation of any third order derivative, allowing for more robust numerical computations. Moreover, the left-hand side of the equations corresponds to the NSW in their conservative form. The formulation is well-suited for a splitting approach separating the hyperbolic and the dispersive part of the equations.

## NUMERICAL SCHEMES

We decompose the solution operator  $S(\bullet)$  associated to the equations (1) at each time step  $dt$  by the following second order splitting scheme:

$$S(dt) = S1(dt/2) S2(dt) S1(dt/2), \quad (3)$$

where S1 and S2 are respectively associated to the hyperbolic and dispersive parts of the S-GN equations. S1 is treated using a finite-volume method, and a finite-difference method is used for the dispersive part S2. We briefly present here their main characteristics. The reader is referred to Bonneton et al. 2010a for further details concerning this hybrid method.

### Hyperbolic part

Our S-GN model has been developed as an extension of the NSW code SURF\_WB (Marche et al 2007), which has been extensively validated for the description of wave propagation in the surf and swash zones. The schemes used in S1 are those which have been developed for SURF\_WB: a detailed review of the numerical methods can be found in Marche et al. 2007 and Berthon and Marche 2008. S1 is the solution operator associated with the following system:

$$\begin{cases} \partial_t h + \varepsilon \nabla \cdot (h \mathbf{v}) = 0 \\ \partial_t (h \mathbf{v}) + gh \nabla \zeta + \varepsilon \nabla \cdot (h \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

This system can be regarded as an hyperbolic system of conservation laws with a source term controlled by the topography variations. It is convenient to rewrite the system (4) in term of the conservative variables  $\mathbf{w} = (h, hu)$  in the form (here for the 1D-problem):

$$\partial_t \mathbf{w} + f(\mathbf{w})_x = S(\mathbf{w}),$$

where  $f(\mathbf{w}) = (hu, hu^2 + 0.5gh^2)$  and  $S = (0, -ghb_x)$  the source term. To perform numerical approximations of the weak solutions of this system, we use a high order finite-volume method in conservative variables. More precisely, we use the 4<sup>th</sup>-order MUSCL reconstruction suggested in Berthon and Marche 2008. Since we aim at computing the complex interactions between propagating waves and topography, including the preservation of motionless steady states, we also embed this approach into a well-balanced scheme (see Audusse et al. 2004). Additional reconstructions are also introduced in order to obtain a positive preserving scheme. The reconstructed quantities are then injected in a positive preserving VFRoe Riemann solver, able to deal with dry areas. The result is a high-order positive preserving well-balanced shock-capturing scheme, able to handle breaking bores propagation as well as moving shorelines without any tracking method.

### Dispersive terms

S2 is the solution operator associated with the system:

$$\begin{cases} \partial_t h = 0 \\ \partial_t (h \mathbf{v}) = -D, \end{cases} \quad (5)$$

The system (5) is solved at each time step using a classic finite-difference approach, of fourth-order in space.

Concerning the time discretization, explicit methods are used both in S1 and S2. The systems are integrated in time using a classical fourth-order Runge-Kutta method. When the water depth vanishes, a small routine is applied in order to ensure the stability of the numerical results. When the water depth  $h$  is smaller than a threshold  $h_\varepsilon$ , we impose  $h = h_\varepsilon$  and  $\mathbf{v} = 0$ . Extensive validations of the numerical methods for the 1D problem can be found in Bonneton et al. 2010a,b and Chazel et al. 2010. In particular, the propagation of a strongly nonlinear cnoidal wave solution of the S-GN equations has been investigated, demonstrating that the numerical solution converge to the exact one for very small  $dx$ . The 2HD extension is left for future work.

## WAVE BREAKING

In order to handle wave breaking, we switch from S-GN to NSW equations locally in space and time, by skipping the dispersive step S2 when the wave is ready to break. In this way, we only solve the hyperbolic part of the equation for the wave fronts, and the breaking wave dissipation is determined by the shock theory. The coupling between the two sets of equations is thus performed in a natural way, without

implementing any boundary conditions. As we aim at applying our code to realistic incoming waves, implying different locations of the breaking point, we need to handle each wave individually. We present in this section a simple way to detect wave fronts at each time step, as well as the criterion to initiate and terminate breaking.

### Detection of the wave fronts

In order to decide where to suppress the dispersive step, we use the first step S1 of the time-splitting as a predictor to assess the local energy dissipation. It can be expressed as:

$$D_i(x, t) = -\left(\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}\right), \quad (6)$$

with  $E = \rho/2(hu^2 + g((h+b)^2 - b^2))$  and  $F = \rho hu(u^2/2 + g(h+b))$  the energy and the energy flux densities. The local dissipation is close to zero in regular wave regions and forms peaks when shocks are appearing. We can then locate the future breaking wave fronts at each time step, and eventually skip the following step S2 in their vicinities. Figure 1 illustrates the evolution of  $D_i$  for an academic case, concerning a sine wave breaking on a flat bottom (see also Bonneton et al. 2007). Dispersive terms are turned off for this simulation: the wave quickly steepens and breaks, without previous shoaling. Periodic boundary conditions are imposed, and the length of the computational domain is equal to the wave length of the sine wave. The wave height and the corresponding dissipation are plotted at different times, showing that the wave fronts can be easily located as soon as shocks are developing through the location of dissipation peaks.

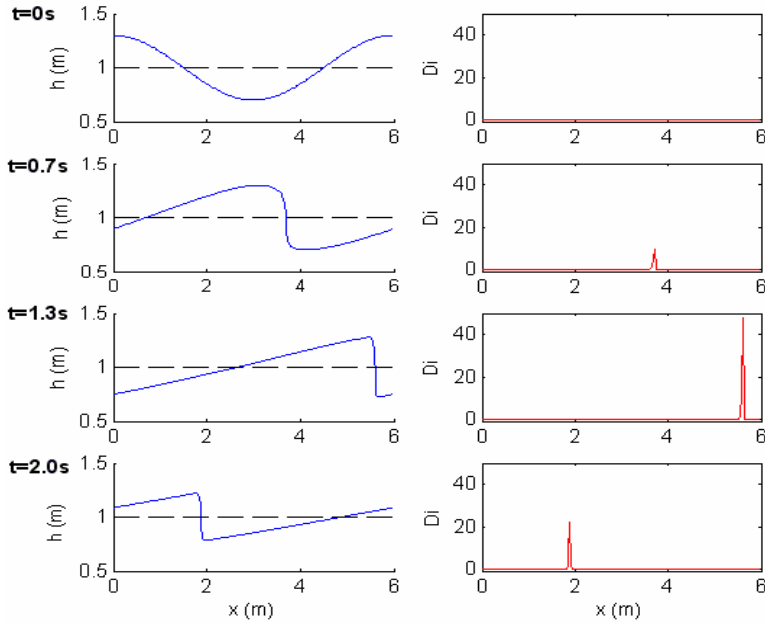


Figure 1. Sine wave propagating over a flat bottom, at different time.  $\epsilon=0.6$ ;  $h_0=1$ ; Left panel: free surface elevation. Right panel: energy dissipation ( $D_i$ ).

### Characterization of breaking

In order to characterize each wave front individually, the local dissipation is integrated over the front and normalized by the theoretical dissipation, given by the shock theory:

$$D_{th} = \frac{\rho g}{4} \left( \frac{g(h_1 + h_2)}{2h_1 h_2} \right)^{1/2} (h_2 - h_1)^3.$$

$D_{th}$  is the energy dissipated across the shock, with  $h_1$  and  $h_2$  the water heights in front and behind the shock (see Figure 2). From a practical point of view,  $h_1$  and  $h_2$  are approximated by the local minimum and maximum of  $h$  which are the closest to the peak of dissipation, and therefore  $D_{th}$  is estimated by:

$$D_{th} \approx \frac{\rho g}{4} \left( \frac{g(h_{\min} + h_{\max})}{2h_{\min} h_{\max}} \right)^{1/2} H^3.$$

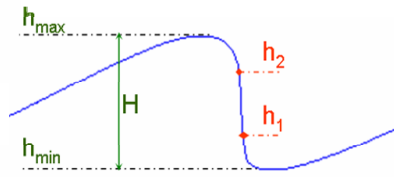


Figure 2. Definition sketch.

The time-evolution of the normalized dissipation  $\int_{front} D_i(x,t)dx/D_{th}$  for the previous sine wave is plotted in Figure 3. It is close to zero before breaking, and increases significantly when shocks start developing ( $h_2 - h_1 < H$ ). Once the breaker is saturated (i.e.  $h_2 - h_1 = H$ ), the normalized dissipation stays close to 1.

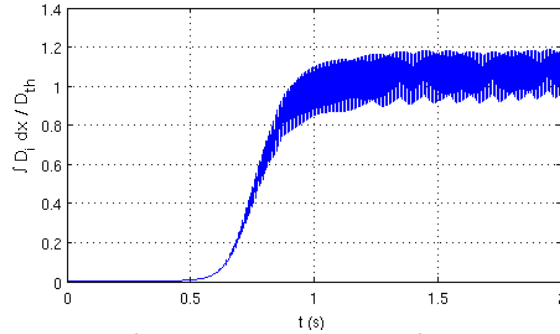
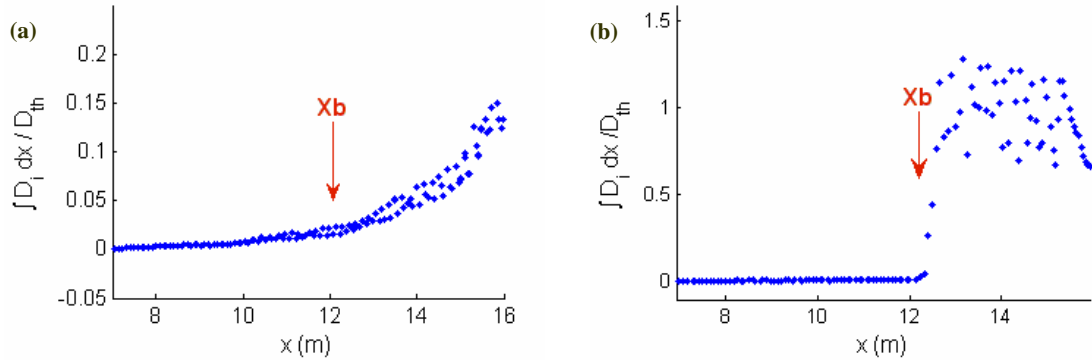


Figure 3. Sine wave propagating over a flat bottom. Time-evolution of the normalized dissipation.

Let's now consider a more realistic test case, corresponding to experiments performed by Ting and Kirby in 1994. Cnoidal waves are propagating and breaking over a beach of slope 1:35. Two simulations are run. For the first test case, the code is run with the full S-GN equations, without any special treatment for wave breaking. The waves keep propagating shoreward to the experimental breaking point without dissipating enough energy, leading to unrealistic wave heights close to the shoreline. As we can see in the left panel of Figure 4, there is an increase of the normalized dissipation in the vicinity of the experimentally observed breaking point, but the transition is not sharp enough to use dissipation as the only criterion to initiate wave breaking. This is mainly due to the presence of the dispersive step S2, which tends to counterbalance the shock formation which occurs during the hyperbolic steps, preventing the shocks to fully develop. This analysis is confirmed by the second test, where a switch to NSW is performed shoreward to the experimental breaking point. As soon as we suppress the step S2, we observe a fast



increase of this dissipation, within a few cells, until the waves are fully broken. These broken waves keep propagating shoreward with a normalized dissipation oscillating around one. Based on this observation, we define a simple criterion to characterize wave fronts. If  $\int_{front} D_i(x,t)dx/D_{th} > 0.5$  the wave is already broken, and if  $\int_{front} D_i(x,t)dx/D_{th} \leq 0.5$ , the wave is not breaking yet. Thus, we can easily determine at which stage of their transformation the waves are at each time step, without following them.



**Figure 4. Normalized dissipation as a function of the position for the cnoidal wave propagation over a sloping beach (Ting and Kirby (1994) experiment). (a): without any treatment for wave breaking. (b): for  $x > X_b$  we switch to NSWE. ( $X_b$ : experimentally observed breaking point),**

### A mixed breaking criterion

The study of the energy dissipation needs to be combined with a criterion for the initiation of breaking. We use here a criterion based on the front slope, initially introduced by Schäffer et al. 1993. Two angles are then defined.  $\Phi_i$  corresponds to the angle at which the breaking process starts, and  $\Phi_f$ , the angle at which the breaking process stops. We choose  $\Phi_i = 30^\circ$  and  $\Phi_f = 8^\circ$ , which are the optimal angles determined by Cienfuegos et al. 2010 for their S-GN model.

Finally, the following method is applied in order to handle wave breaking at each time step. Potentially breaking wave fronts are first located thanks to the energy dissipation. For each of them, we compute the value of the front slope and the normalized dissipation. Finally, we decide if we switch locally from one set of equations to the other depending on the values of these two parameters:

If  $\int_{front} D_i(x,t)dx/D_{th} > 0.5$  and  $\Phi > \Phi_f$ : the wave is broken and will keep breaking (as long as  $\Phi > \Phi_f$ ).

If  $\int_{front} D_i(x,t)dx/D_{th} \leq 0.5$  and  $\Phi < \Phi_i$ : the wave is not breaking. The wave front is governed by S-GN equations. The switch to NSWE will eventually occur if  $\Phi$  gets larger than  $\Phi_i$ .

As several wave fronts can be detected at each time step, either breaking or not, the width of the zone (centred on the peak of dissipation) where the switch to NSWE is performed needs to be defined. It must be of the order of magnitude of the physical length of the roller, which is roughly proportional to the wave height. For the following test cases, we choose  $l_{front} \approx \delta H$ . Further studies are necessary in order to determine an optimal value of  $l_{front}$ , in particular for test cases involving the propagation of irregular wave fronts.

The transition between the two systems is performed abruptly, without any smooth transition zone. In this way, wave propagation is governed by one given set of equations in each cell, and not by a non-physical mix of both sets. The transition generates some disturbances, but they remain of small amplitude and do not lead to instabilities. No numerical filtering is applied. It is worth noting that the generation of oscillations is also observed for Boussinesq models based on the surface roller method when the extra-terms responsible for wave breaking are activated.

This method has two important advantages. There is no parameterization for the energy dissipation due to wave breaking, since it is implicitly predicted by the shock theory. We do not need any complex algorithm to detect and follow the waves, contrary to most of the Boussinesq-type models with an ad-hoc parameterization for wave breaking. The detection and characterization of the waves at each time step is performed through the study of the energy dissipation.

## VALIDATIONS

### Cox experiment

In our first test case we consider Cox's regular waves experiment (1995). Cnoidal waves of relative amplitude  $H/h_0=0.29$  and period  $T=2.2s$  were generated in the horizontal part of a wave flume, of depth  $h_0=0.4m$ . They were then propagating and breaking on a 1:35 plane beach. For this test case, synchronized time-series of free surface elevation are available at six locations, corresponding to wave gauges located outside (L1 and L2) and inside (L3 to L6) the surf zone (see Figure 5). The experimental breaking point is located slightly shoreward to L2.

Figure 6 compares the experimental and numerical time-series for this experiment. It is worth noting that the time-series are in phase, demonstrating that wave celerity is accurately predicted by the model. We have a very good overall agreement concerning the shape of the waves, both in the shoaling and surf zone. In particular, the model is able to reproduce the typical saw-tooth profile in the inner surf zone.

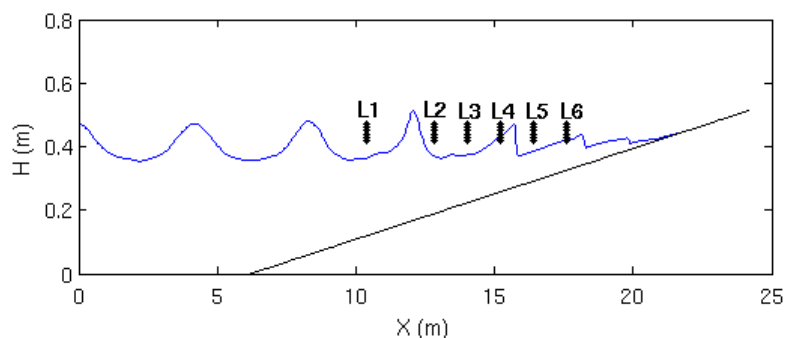
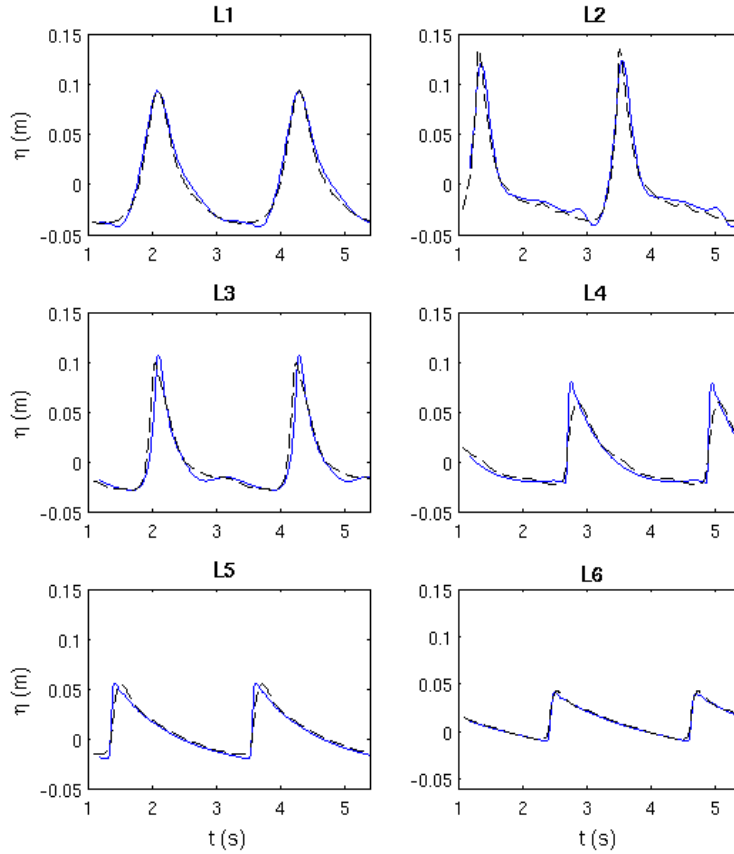


Figure 5. Definition sketch for Cox experiment (1995). Vertical lines (L1 to L6) correspond to the locations of the wave gauges. The free surface has been computed using the S-GN model.



**Figure 6. Comparisons of computed (blue lines) and experimental synchronized time-series (black dashed-lines) of free-surface elevation at the wave gauges for Cox breaking experiment (1995).**

### Ting and Kirby experiment

In this section the numerical model is applied to reproduce the laboratory experiments performed by Ting and Kirby 1994. Cnoidal waves were generated in the horizontal part of a flume ( $h_0=0.4\text{m}$ ) and were propagating over a 1:35 sloping beach. The wave period was  $T=2.0\text{s}$  and the incident wave height  $H=0.125\text{m}$ . For this experiment, non-synchronized time-series of surface elevations and mean characteristic levels (crest, trough and mean water levels) are available at 21 locations in the shoaling and surf zone. For the simulation, the grid size of the mesh is  $dx=0.05\text{m}$  and the time step is  $dt=0.02\text{s}$ .

Figure 7 shows the spatial variation of the crest and trough elevations, as well as the variation of the mean water level for experimental and numerical data. We can see that wave breaking is predicted a bit too early by our model. It explains the significant difference in both wave shape and amplitude observed in Figure 8 for the time-series at 12m, i.e. close to the breaking. The agreement between data and model predictions is good concerning the prediction of wave set-up, illustrating the fact that our model dissipates a realistic amount of energy. Figure 8 compares the time-series of free surface elevations at different locations. We can see that the wave asymmetry is accurately reproduced, even in the last stages of shoaling and in the Inner Surf Zone. The main discrepancies are found in the vicinity of the breaking point, but the overall agreement improves significantly while propagating shoreward. In particular, the wave height decay in the ISZ is well reproduced. A slight underestimation of wave shoaling can be observed in this test case.

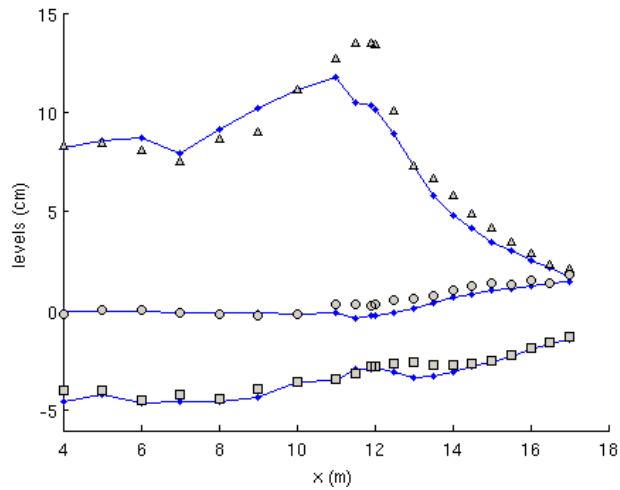


Figure 7. Comparisons of computed (blue lines) and experimental data (symbols) for Ting and Kirby experiment. (●) : Mean Water Level; (■) : trough elevation relative to MWL; (▲) : crest elevation relative to MWL.

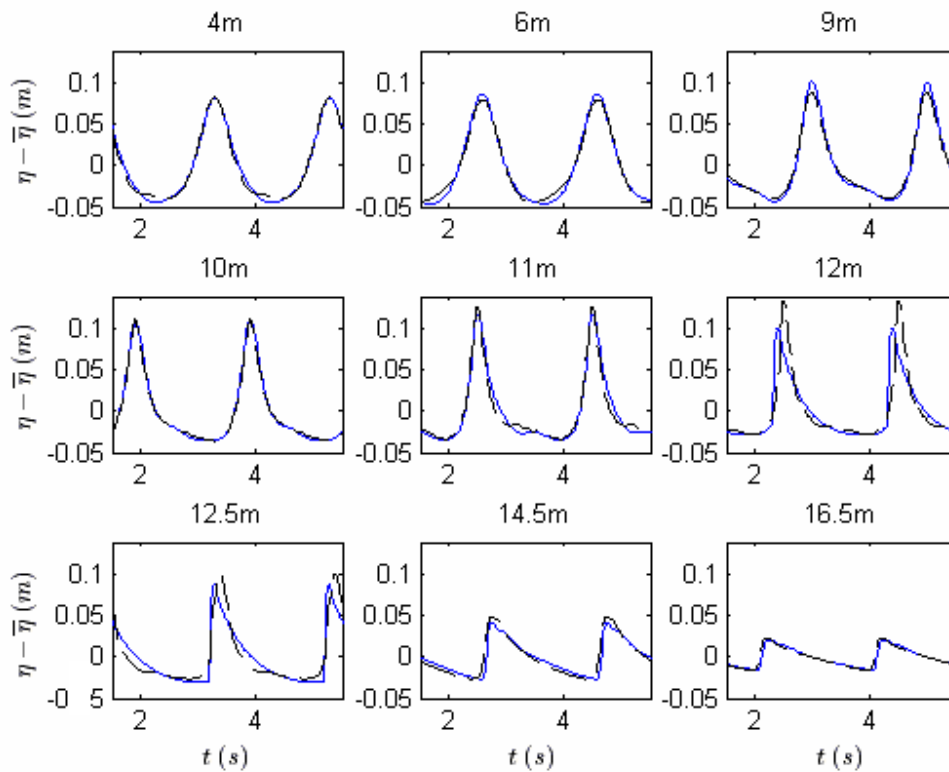


Figure 8. Comparisons of computed (blue lines) and measured (black dashed-lines) time-series of free surface elevations for Ting and Kirby experiment at different locations.

### Synolakis experiment

In the last test case, we assess the ability of our model to describe wave breaking and shoreline motions. It is based on laboratory experiments carried out by Synolakis (1987) for an incident solitary wave of relative amplitude  $a_0/h_0=0.28$ , propagating and breaking over a planar beach with a slope 1:19.85. For this experiment, spatial snapshots at different times are available. The simulations are performed using the grid size  $dx=0.08m$ , and  $dt=0.02s$ . Bottom friction effects are expected to be important when the water becomes very shallow, i.e. during the run-up and run-down stages: a quadratic friction term is introduced for this simulation (friction coefficient  $f=0.002$ ).

The comparisons between measured and computed waves are presented in Figure 9. We can see that the overall agreement is very good during shoaling, breaking, run-up and run-down. Moreover the model is able to describe the formation and breaking of a backwash bore, which is a demanding test for most of Boussinesq-type models, since it involves broken bore propagating backward.

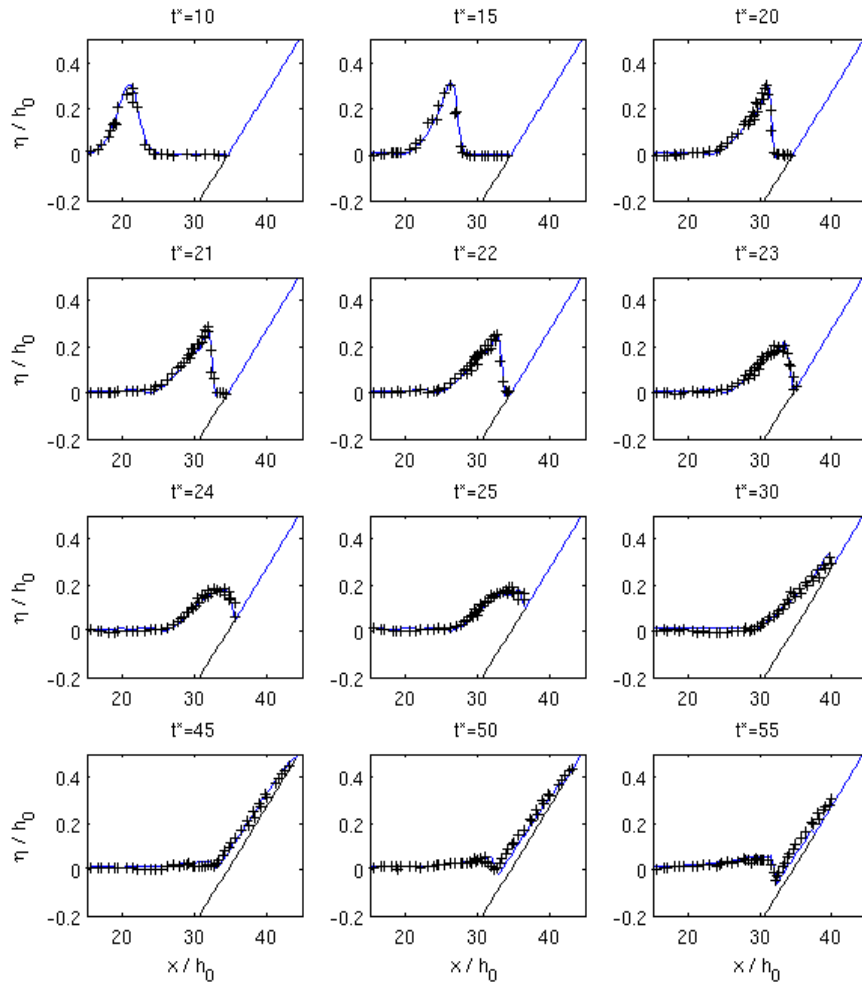


Figure 9. Comparisons of model predictions (blue lines) and experimental snapshots (+) for a breaking solitary wave with non-dimensional initial incident amplitude  $a_0/h_0=0.28$ , on a 1:20 plane beach (Synolakis (1987)).  $t^* = t(g/h_0)^{1/2}$ .

## CONCLUSIONS

In this paper, a fully non-linear weakly dispersive Green-Naghdi model is presented and successfully applied to the description of breaking waves and shoreline motions. This model has been developed as an extension of the well-validated NSW shock-capturing code SURF\_WB (Marche et al 2007), using a time-splitting approach with hybrid schemes (Bonneton et al 2010a). The modelling strategy for wave breaking is based on the decomposition of S-GN equations between an hyperbolic part corresponding to the NSWE and a dispersive term. When the wave is ready to break, we switch locally to the NSWE by skipping the dispersive step, so as broken waves can be described as shocks. Energy dissipation due to wave breaking is then predicted by the shock theory, without needing any ad-hoc parameterization.

The detection and characterization of wave fronts at each time step are easily performed through the study of local energy dissipation. Combined with a commonly-used criterion based on the roller slope for the initiation and cessation of breaking, we obtain an efficient treatment for wave breaking and broken waves propagation without any complex algorithm to follow the waves.

Our method has been extensively validated for the breaking of regular waves. Additional work remains to be done concerning the validation for irregular wave fields. This model could then be a powerful tool to study submersion problems. In particular, preliminary tests suggest that it could efficiently be applied to overtopping problems.

Work is in progress concerning the 2HD extension of our model. This extension should be relatively straightforward since SURF\_WB is already a well-validated up-to-date 2HD code, able to accurately describe broken waves propagation. The new 2HD S-GN code could be a very powerful tool to study the generation of wave-induced mean current vorticity in the surf zone (Castelle et al. 2010). Indeed, it has been showed that the dissipation gradients linked to differential breaking are a forcing mechanism for the generation of macrovorticity (Bonneton et al. 2010c).

## ACKNOWLEDGMENTS

This work has been supported by the ANR MathOcean and by the project ECOS-CONYCIT. PhD thesis of M. Tissier is founded by MISEEVA (ANR).

## REFERENCES

- Audusse, E., F. Bouchut, M.-O. Bristeau, R. Klein and B. Perthame. 2004. A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 25(6), 2050-2065.
- Berthon, C. and F. Marche, A positive preserving high order VFRoe scheme for shallow water equations: A class of relaxation schemes. 2008. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 30(5), 2587-2612.
- Bonneton, P. 2007. Modelling of periodic wave transformation in the inner surf zone, *Ocean Engineering*, 34, 1459-1471.
- Bonneton, P., F. Chazel, D. Lannes, F. Marche and M. Tissier. 2010a. A splitting approach for the fully nonlinear and weakly dispersive Green-Naghdi model, *in correction to Journal of Computational Physics*.
- Bonneton, P., E. Barthélemy, J.D. Carter, F. Chazel, R. Cienfuegos, D. Lannes, F. Marche, M. Tissier. 2010b. Fully nonlinear weakly dispersive modelling of wave propagation, breaking and run-up, *in correction to European Journal of Mechanics, B/Fluids*.
- Bonneton P., N. Bruneau, F. Marche, B. Castelle. 2010c. Large-scale vorticity generation due to dissipating waves in the surf zone, *DCDS-S*, 13(4), 729-738.
- Brocchini, M. and N. Dodd. 2008. Nonlinear Shallow Water Equation Modeling for Coastal Engineering, *J. Wtrwy., Port, Coast., and Oc. Engrg.*, 134(2), 104-120.
- Bruno, D., F. De Serio and M. Mossa. 2009. The FUNWAVE model application and its validation using laboratory data, *Coastal Engineering*, 56(7), 773-787.

- Castelle, B., H. Michallet, V. Marieu, F. Leckler, B. Dubardier, A. Lambert, C. Berni, P. Bonneton, E. Barthélemy and F. Bouchette, 2010. Laboratory experiment on rip current circulations over a moveable bed: drifter measurements, *in revision to Journal of Geophysical Research*.
- Chazel, F., D. Lannes, F. Marche. 2010. Numerical simulation of strongly nonlinear and dispersive waves using a Green-Naghdi model, *Journal of Scientific Computing*, DOI: 10.1007/s10915-010-9395-9.
- Cienfuegos, R., E. Barthélemy, and P. Bonneton. 2006. A fourth-order compact finite volume scheme for fully nonlinear and weakly dispersive Boussinesq-type equations. Part I: Model development and analysis. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 56, 1217-1253.
- Cienfuegos, R., E. Barthélemy and P. Bonneton. 2010. A wave-breaking model for Boussinesq-type equations including roller effects in the mass conservation equation. *J. Wtrwy., Port, Coast., and Oc. Engrg.*, 136(1), 10-26.
- Cox, D. 1995. Experimental and numerical modelling of surf zone hydrodynamics. *PhD thesis, University of Delaware, Newark, Del.*
- Kennedy, A.B., Q. Chen, J.T. Kirby and R.A. Dalrymple. 2000. Boussinesq modelling of wave transformation, breaking and runup. I:1D. *J. Wtrwy., Port, Coast., and Oc. Engrg.*, 119, 618-638.
- Kobayashi, N., G. De Silva and K. Watson. 1989. Wave transformation and swash oscillation on gentle and steep slopes, *Journal of Geophysical Research*, 94, 951-966.
- Lannes, D., and P. Bonneton. 2009. Derivation of asymptotic two-dimensional time-dependent equations for surface water wave propagation, *Physics of Fluids*, 21(1).
- Madsen, P.A., O.R. Sørensen and H.A. Schäffer. 1997. Surf zone dynamics simulated by a Boussinesq type model. Part I. Model description and cross-shore motion of regular waves, *Coastal Engineering*, 32, 255-287.
- Marche, M., P. Bonneton, P. Fabrie and N. Seguin. 2007. Evaluation of well-balanced bore-capturing schemes for 2D wetting and drying processes, *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 53(5), 867-894.
- Schäffer, H.A., P. A. Madsen and R. Deigaard. 1993. A Boussinesq model for waves breaking in shallow water, *Coastal Engineering*, 20, 185-202.
- Synolakis, C. E.. 1987. The run-up of solitary waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 185, 523-555.
- Ting, F. and J. Kirby. 1994. Observation of undertow and turbulence in a laboratory surf zone. *Coastal Engineering*, 24, 51-80.





## Résumé

Dans cette thèse, nous introduisons un nouveau modèle instationnaire de vagues valable de la zone de levée à la zone de jet de rive adapté à l'étude de la submersion. Le modèle est basé sur les équations de Serre Green-Naghdi (S-GN), dont l'application à la zone de surf reste un domaine de recherche ouvert. Nous proposons une nouvelle approche pour gérer le déferlement dans ce type de modèle, basée sur la représentation des fronts déferlés par des chocs. Cette approche a été utilisée avec succès pour les modèles basés sur les équations de Saint-Venant (SV) et permet une description simple et efficace du déferlement et des mouvements de la ligne d'eau. Dans ces travaux, nous cherchons à étendre le domaine de validité du modèle SV SURF-WB (Marche et al. 2007) vers la zone de levée en incluant les termes dispersifs propres aux équations de S-GN. Des basculements locaux vers les équations de SV au niveau des fronts permettent alors aux vagues de déferler et dissiper leur énergie. Le modèle obtenu, appelé SURF-GN, est validé à l'aide de données de laboratoire correspondant à différents types de vagues incidentes et de plages. Il est ensuite utilisé pour analyser la dynamique des fronts d'ondes longues de type tsunami en zone littorale. Nous montrons que SURF-GN peut décrire les différents types de fronts, d'ondulé non-déferlé à purement déferlé. Les conséquences de la transformation d'une onde de type tsunami en train d'ondulations lors de la propagation sur une plage sont ensuite considérées. Nous présentons finalement une étude de la célérité des vagues déferlées, basée sur les données de la campagne de mesure in-situ ECORS Truc-Vert 2008. L'influence des non-linéarités est en particulier quantifiée.

Mots clés : Modèle de type Boussinesq fortement non-linéaire ; Zone de surf ; jet de rive ; Théorie des chocs ; Schémas hybrides ; Franchissement ; Ressauts ondulés ; Célérité des vagues déferlées ;

## Abstract

In this thesis, we introduce a new numerical model able to describe wave transformation from the shoaling to the swash zones, including overtopping. This model is based on Serre Green-Naghdi equations, which are the basic fully nonlinear Boussinesq-type equations. These equations can accurately describe wave dynamics prior to breaking, but their application to the surf zone usually requires the use of complex parameterizations. We propose a new approach to describe wave breaking in S-GN models, based on the representation of breaking wave fronts as shocks. This method has been successfully applied to the Nonlinear Shallow Water (NSW) equations, and allows for an easy treatment of wave breaking and shoreline motions. However, the NSW equations can only be applied after breaking. In this thesis, we aim at extending the validity domain of the NSW model SURF-WB (Marche et al. 2007) to the shoaling zone by adding the S-GN dispersive terms to the governing equations. Local switches to NSW equations are then performed in the vicinity of the breaking fronts, allowing for the waves to break and dissipate their energy. Extensive validations using laboratory data are presented. The new model, called SURF-GN, is then applied to study tsunami-like undular bore dynamics in the nearshore. The model ability to describe bore dynamics for a large range of Froude number is first demonstrated, and the effects of the bore transformation on wave run-up over a sloping beach are considered. We finally present an in-situ study of broken wave celerity, based on the ECORS-Truc Vert 2008 field experiment. In particular, we quantify the effects of non-linearities and evaluate the predictive ability of several non-linear celerity models.

Keywords : Fully non-linear Boussinesq type model ; Surf zone ; Swash zone ; Shock theory ; Hybrid schemes ; Overtopping ; Undular bores ; Broken wave celerity ;